Benoulli Resolve

Matemática

6V Volume 4

Sumário - Matemática

Módulo A

Módulo B

Módulo C

Módulo D

Módulo E

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 07

Princípio fundamental da contagem e arranjos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Foi dado que uma pessoa tem uma senha de 5 algarismos distintos, começando com o número 6 e o algarismo 7 em alguma das quatro posições restantes. Para os outros três números da senha não há restrição.

Assim, para o primeiro número, temos uma possibilidade, para os quatro próximos números temos quatro possibilidades de digitar o número 7 e, para as três posições restantes, temos oito, sete e seis possibilidades para digitar qualquer número.

Portanto, o número máximo de tentativas para acertar a senha é o produto das possibilidades anteriores, ou seja, 1.4.8.7.6 = 1 344.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Atualmente, as placas dos veículos são compostas por três letras seguidas de quatro algarismos, o que permite que se tenha $26^3.10^4$ placas diferentes. Com a possível mudança para quatro letras e três algarismos, a quantidade máxima de placas será dada por $26^4.10^3$. Assim, o aumento obtido com essa modificação corresponde a:

$26^4.10^3 - 26^3.10^4 = 26^3.10^3(26 - 10) = 26^3.10^3.16$

Comparando com o número máximo de placas em vigor,

temos $\frac{26^3.10^3.16}{26^3.10^4} = \frac{16}{10} = 1{,}6$, ou seja, seria inferior ao dobro das placas atuais.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Observe que o baralho possui 13 valores distintos dentre as 52 cartas. Então, o número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho contendo uma quadra é dado por:

$\underset{13}{\underline{x_{ouros}}}\ \underset{1}{\underline{x_{copas}}}\ \underset{1}{\underline{x_{espadas}}}\ \underset{1}{\underline{x_{paus}}}\ \underset{48}{\underline{y}}$ 13.1.1.1.48 = 624

cartas de mesmo valor; carta de valor diferente (52 – 4)

Questão 04 – Letra A

Comentário: Primeiramente, vamos escolher o presidente: 2 opções. Cabe, ao vice-presidente, a outra poltrona da cabeceira da mesa. Como o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente, temos, para ele, 2 opções de assento. Restam sete lugares para acomodar quatro pessoas. Assim, as sete pessoas podem se acomodar para participar da reunião de 2.2.7.6.5.4 = 3 360 maneiras.

Questão 05 – Letra B

Comentário: A quantidade de números inteiros positivos menores que 1 000 000, incluindo aqueles com algarismos repetidos, que podemos formar com os algarismos 2 e 3 são:

$\overline{2} = 2$

$\overline{2}.\overline{2} = 4$

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 8$

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 16$

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 32$

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 64$

Sempre temos 2 possibilidades para formar todos os números de um, dois, três, quatro, cinco e seis algarismos.

Portanto, temos 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126 números menores que 1 000 000 formados com os algarismos 2 e / ou 3.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Temos três cores disponíveis para pintar cinco círculos, de modo que dois círculos consecutivos nunca sejam pintados da mesma cor. O primeiro círculo pode receber qualquer uma das três cores, enquanto que o segundo tem duas opções. Já o terceiro não pode ter a mesma cor do segundo, mas pode ter a mesma do primeiro (2 opções) e assim por diante.

Logo:

$\overline{3}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 48$ formas de pintar os círculos

Questão 03 – Letra D

Comentário:

$\underset{24}{\underline{1^o\ lugar}} . \underset{23}{\underline{2^o\ lugar}} . \underset{22}{\underline{3^o\ lugar}} = 12\ 144$

Questão 06 – Letra D

Comentário:

Ida: $\underbrace{\textbf{A} \text{ para } \textbf{B}}_{3 \text{ possib.}}$ e $\underbrace{\textbf{B} \text{ para } \textbf{C}}_{4 \text{ possib.}}$ → 3 possib. . 4 possib. = 12

Volta: $\underbrace{\textbf{C} \text{ para } \textbf{B}}_{3 \text{ possib.}}$ e $\underbrace{\textbf{B} \text{ para } \textbf{A}}_{2 \text{ possib.}}$ → 3 possib. . 2 possib. = 6

Total: 12.6 = 72 maneiras

Questão 09 – Letra A

Comentário: A quantidade de senhas possíveis corresponde a:

$\underset{5}{\square}\underset{5}{\square}\underset{5}{\square}\underset{5}{\square} = 625$

Como Maria não quer que sua senha contenha o número 13, temos as seguintes possibilidades:

Observe que dentre as possibilidades, a senha 1313 é contada duas vezes (tanto na primeira situação quanto na terceira). Então, o número de senhas que Maria não quer é 25 + 25 + 25 – 1 = 74. Assim, são 625 – 74 = 551 maneiras de Maria escolher sua senha.

Questão 13 – Letra E

Comentário: Partindo do vértice **A**, temos 3 deslocamentos possíveis (três arestas partem de **A**). A partir de cada um desses vértices, temos agora dois deslocamentos possíveis para chegar a **O**, pois não podemos retornar a **A**.

Logo, no cubo inferior, temos 3.2 = 6 caminhos mais curtos. Analogamente, temos 6 caminhos mais curtos de **O** até **B**, totalizando 6.6 = 36 caminhos mais curtos.

Questão 14 – Letra D

Comentário:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A soma dos algarismos é par nas seguintes condições:

1ª) Três algarismos pares

$\underset{3}{\text{Par}} . \underset{2}{\text{Par}} . \underset{1}{\text{Par}} = 6$

2ª) Dois números ímpares e um par – configurações:

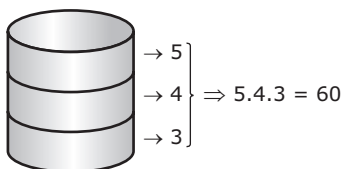
$\underset{3}{\text{Ímpar}} . \underset{2}{\text{Ímpar}} . \underset{3}{\text{Par}} = 18$

$\underset{3}{\text{Ímpar}} . \underset{3}{\text{Par}} . \underset{2}{\text{Ímpar}} = 18$

$\underset{3}{\text{Par}} . \underset{3}{\text{Ímpar}} . \underset{2}{\text{Ímpar}} = 18$

Total: 6 + 54 = 60

Questão 15 – Letra E

Comentário:

Questão 16 – Letra A

Comentário: Do total de senhas possíveis, vamos subtrair o total de senhas inválidas.

- Senhas possíveis:

10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 100 000

- Senhas inválidas (sem dígitos repetidos):

10 . 9 . 8 . 7 . 6 = 30 240

Senhas válidas: 100 000 – 30 240 = 69 760

Questão 17 – Letra E

Comentário: Em cada uma das seis primeiras questões, temos duas opções de escolha (certo ou errado), enquanto que nas outras quatro, temos três alternativas. Assim, a quantidade de sequências de respostas possíveis na resolução da prova corresponde a:

$\underbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2}_{\text{questões com opções de escolher certo ou errado}} . \underbrace{3 . 3 . 3 . 3}_{\text{questões com três opções de escolha}} = 2^6.3^4$

Questão 18 – Letra D

Comentário: Vamos supor a seguinte sequência.

$\underset{4}{\text{MG}} . \underset{3}{\text{ES}} . \underset{2}{\text{RJ}} . \underset{2}{\text{SP}} = 48$ formas

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Como há 6 personagens, 5 objetos e 9 cômodos, o número máximo de possibilidades de um personagem esconder um objeto em um cômodo é:

6.9.5 = 270

Como todas as possibilidades são distintas, algum aluno acertou a resposta, pois há 10 alunos a mais que o número máximo de respostas possíveis.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Num sistema de códigos com 5 barras, sejam B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 as cinco barras. Para que o código seja o mesmo nos dois sentidos, B_1 e B_5 devem ter a mesma cor, assim como B_2 e B_4 devem ter a mesma cor.

Logo, há duas possibilidades para B_1 e B_5, duas possibilidades para B_2 e B_4 e duas possibilidades para B_3, ou seja, $2^3 = 8$. Retirando-se os dois códigos em que todas as cores são iguais, temos 8 – 2 = 6.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Para escolher um elemento do grupo dos cetáceos, existem 2 formas, para o grupo dos primatas, 20, e para o dos roedores, 33. Portanto, utilizando o princípio multiplicativo, temos que o número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies é:

$\underset{\text{Cetáceos}}{2} . \underset{\text{Primatas}}{20} . \underset{\text{Roedores}}{33} = 1\,320$

MÓDULO – A 08

Permutações

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Considerando os 3 homens como um bloco representando uma única pessoa, temos uma permutação de 6 pessoas. Além disso, ainda podemos permutar os 3 homens entre si. Portanto, o resultado pedido é dado por $P_6.P_3 = 6!.3!$.

Questão 02 – Letra E

Comentário:

I) Palavras que começam por **A**

II) Palavras que começam por **O**

III) Palavras que começam por **P**

Observe que já existem 72 anagramas. Portanto, a 73ª palavra será RAOPV.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Existem 2 maneiras de escolher um dos lados da mesa. Escolhido o lado, consideremos o casal como sendo um só. Temos então $P_2 = 2! = 2$ maneiras de sentar o casal e um membro da família. O casal ainda pode trocar de lugar entre si de $P_2 = 2! = 2$ modos. Escolhido o lugar do casal, a família pode ocupar os 4 lugares de $P_4 = 4! = 24$ maneiras. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o resultado pedido é dado por 2.2.2.24 = 192.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Devemos permutar o bloco formado pelas mulheres com os 6 homens, bem como as mulheres dentro do bloco. Assim, temos:

$$\underbrace{P_4}_{\text{Permutações dentro do bloco}} . \underbrace{P_7}_{\text{Permutações do bloco com os 6 homens}} = 4!.7!$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Vamos denotar por **A** cada estaca azul, por **V** a estaca vermelha e por **B** a estaca branca. Uma configuração é:

A A A A A B V

Trata-se de um problema de permutação com elementos repetidos. Assim, temos $P_7^5 = \frac{7!}{5!} = 42$.

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra B

Comentário: Do total de permutações, devemos retirar aquelas nas quais os homens estão juntos. Temos:

1º) Total de permutações: $P_5 = 5! = 120$

2º) Permutações com os dois homens juntos:

$$\underbrace{P_2}_{\text{Permutações dos dois homens dentro do bloco}} . \underbrace{P_4}_{\text{Permutações do bloco dos homens com as três mulheres}} = 2!.4! = 48$$

Logo, temos 120 – 48 = 72 permutações nas quais os homens não estão juntos.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Vamos considerar o bloco formado por Pedro e Luísa, bem como o bloco formado por João e Rita. Devemos permutar os blocos entre si, bem como os elementos em cada bloco. Assim, temos $P_2.P_2.P_2 = 2!.2!.2! = 8$ maneiras.

Questão 05 – Letra D

Comentário: As letras **A**, **E**, **O** podem ser permutadas de $P_3 = 3! = 6$ modos. Destes, apenas um corresponde à ordem alfabética. Portanto, em $\frac{1}{6}$ das permutações, as vogais estão em ordem alfabética. Temos, portanto, $\frac{P_7}{6} = \frac{7!}{6} = 840$ anagramas.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Observe que a atividade I deve vir antes da atividade IV. Portanto, vamos considerar as seguintes maneiras de realizar as atividades:

ou

O total de maneiras é igual a 24 + 18 + 12 + 6 = 60.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Devemos calcular o total de números menores do que 75 391. Temos:

1º) Números começados por 1, 3 ou 5

3 . P_4 = 3.4! = 72 números

2º) Números começados por 7

1 . 2 . P_3 = 2.3! = 12 números além dos números 75 139, 75 193, 75 319 (3 números).

Portanto, temos 72 + 12 + 3 = 87 números menores do que 75 391. Logo, esse número ocupa o 88º lugar.

Questão 12 – V V F

Comentário: Vamos analisar as alternativas.

1ª) Se forem utilizados apenas movimentos horizontais e verticais, teremos a seguinte configuração:

H H H H V V V V

Permutando, obtemos $P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!.4!} = 70$ (item verdadeiro)

2ª) Com um movimento diagonal, temos:

D H H H V V V

Permutando, obtemos $P_7^{3,3} = \frac{7!}{3!.3!} = 140$ (item verdadeiro)

3ª) Com três movimentos diagonais, temos:

D D D H V

Permutando, obtemos $P_5^{3} = \frac{5!}{3!} = 20$ (item falso)

Portanto, a sequência é V V F.

Questão 15

Comentário: Sejam **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H** os seguintes passageiros:

A, **B**, **C** – Preferem sentar-se de frente.

D, **E** – Preferem sentar-se de costas.

F, **G**, **H** – Não têm preferência.

Inicialmente, vamos escolher uma pessoa para fazer companhia a **A**, **B** e **C**. Temos 3 possibilidades. Além disso, devemos permutar as 4 pessoas. Logo:

$3.P_4 = 3.4! = 72$ possibilidades

Em seguida, basta permutarmos as 4 restantes.

Temos $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

Portanto, há 72.24 = 1 728 modos de os passageiros se sentarem.

Questão 16 – Letra D

Comentário: Há $\begin{matrix} F_1(-2,0) \\ F_2(2,0) \end{matrix}$ $\begin{matrix} C(0,0) \\ c = 2 \end{matrix}$ maneiras de definir os pilotos e $P_3 = 3! = 6$ modos de ocupar os lugares restantes. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 24.6 = 144 maneiras distintas de acomodar os seis amigos nas motocicletas.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Inicialmente, iremos considerar as delegações do Ceará e de São Paulo como blocos separados. Devemos permutar esses dois blocos com os outros doze participantes (P_{14}). Além disso, devemos permutar os participantes da delegação do Ceará (P_6), bem como os participantes da delegação de São Paulo (P_4). Portanto, o total de maneiras de posicionar os participantes é dado por:

$P_{14}.P_6.P_4 = 14!.6!.4!$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: O número de trajetos que João pode percorrer para visitar seus clientes pode ser calculado por:

A ___ ___ ___ ___ ___ A

P_5 = permutação das 5 cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F**

Como, após examinar uma sequência (trajeto), ele descarta sua simétrica, e gasta 1 min 30 s para examinar cada sequência, então o tempo mínimo necessário para verificar todas as sequências possíveis é:

$\frac{P_5}{2}.1\text{min}30\text{s} = \frac{5!}{2}.\frac{3}{2}\text{min} = \frac{120}{2}.\frac{3}{2} = 90$ min

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: O problema se resume em encontrar a posição do número 75 913 dentre todos os números de 5 algarismos distintos formados por 1, 3, 5, 7 e 9, dispostos em ordem crescente.

Devemos calcular, então, o total de números menores do que 75 913.

Assim:

1) Números começados por 1, 3 ou 5:

3 . P_4 = 3.4! = 72 números

2) Números começados por 7:

7

1 . 2 . P_3 = 2.3! = 12 números

Além desses, temos também 75 139, 75 193, 75 319 e 75 391 (4 números). Portanto, temos 72 + 12 + 4 = 88 números menores que 75 913. Logo, esse número ocupa o 89º lugar.

MÓDULO – B 07

Prismas

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

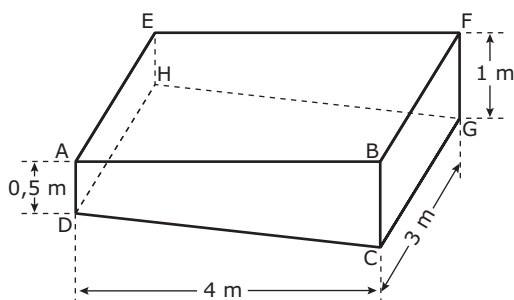
Comentário: A aresta da base do prisma hexagonal vale 2. A área da base A_B do prisma hexagonal é seis vezes a área do triângulo equilátero de lado 2. Assim:

$$A_B = 6.\frac{(2)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 6\sqrt{3}$$

Como a altura do prisma hexagonal é 2, então o volume **V** do prisma é:

$$V = A_B.H = 6\sqrt{3}.2 = 12\sqrt{3}$$

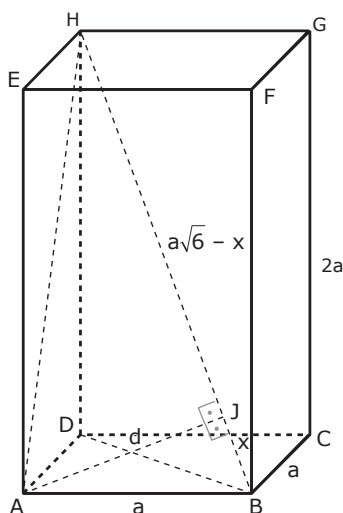
Questão 02 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir.

A piscina desenhada anteriormente é um prisma em que sua base ABCD é um trapézio retângulo. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é:

$$V = A_B.H \Rightarrow V = \frac{(1+0,5)4}{2}.3 \Rightarrow$$

$V = 9\ m^3$, ou seja, V = 9 000 litros

Questão 03 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ BDH, temos que a diagonal $BH = a\sqrt{6}$. Seja **d** a distância do ponto **A** à diagonal BH e BJ = x, temos que os triângulos AJH e AJB são retângulos. Logo, utilizando as relações métricas no Δ ABH, temos:

$$d^2 = (a\sqrt{6} - x).x \qquad d^2 = ax\sqrt{6} - x^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ ABJ, temos $a^2 = d^2 + x^2$. Logo:

$$\begin{cases} d^2 = ax\sqrt{6} - x^2 \\ a^2 = d^2 + x^2 \end{cases} \qquad a^2 = ax\sqrt{6} - x^2 + x^2$$

$$a^2 = ax\sqrt{6} \qquad x = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

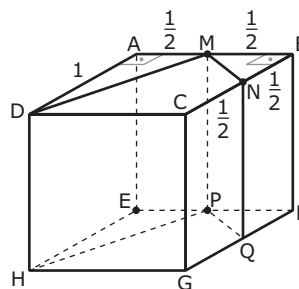
Substituindo **x** em uma das equações do sistema:

$$d^2 = a.\frac{a\sqrt{6}}{6}.\sqrt{6} - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 \qquad d^2 = a^2 - \frac{6a^2}{36} \qquad d = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Os cubos com casca em apenas uma face são os "extremos", mas que, no entanto não estão nas "arestas". Logo, são: 2(18.3 + 18.6 + 6.3) = 360.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir.

A área da base DMNC do prisma DMNCHPQG é:

$$A_{DMNC} = A_{ABCD} - A_{MAD} - A_{MBN} \Rightarrow$$

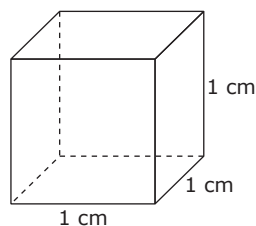
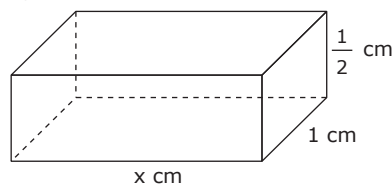
$$A_{DMNC} = (1)^2 - 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow A_{DMNC} = \frac{5}{8}\ cm^3$$

Logo, o volume do prisma DMNCHPQG de altura 1 cm é:

$$V = \frac{5}{8}.1 \Rightarrow V = 0,625\ cm^3$$

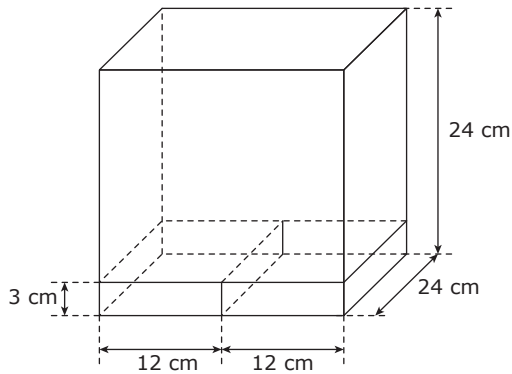
Exercícios Propostos

Questão 03 – Letra D

Comentário: Um cubo de volume igual a 1 cm^3, possui as seguintes dimensões:

Ele será transformado em um paralelepípedo cuja largura é igual à aresta do cubo, e altura corresponde a 50% da aresta do cubo. Logo:

Como não houve perda do volume original, temos que os volumes do paralelepípedo e do cubo são iguais. Assim, podemos determinar o comprimento **x**. Logo:

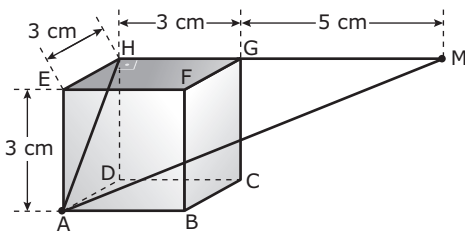
$$x.\frac{1}{2}.1 = 1 \qquad x = 2\ cm$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Em cada caixa, há duas pilhas de livros. Logo, podemos concluir que as arestas das caixas possuem medida igual a 24 cm. Observe a figura a seguir:

Temos que a altura da caixa é igual a 24 cm e que cada livro possui espessura de 3 cm. Logo, em cada pilha, há $\frac{24\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 8$ livros. Como temos duas pilhas de livros, cada caixa contém 2.8 = 16 livros.

Portanto, no total de 45 caixas, temos 45.16 = 720 livros.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir.

A diagonal AH do quadrado ADHE vale $3\sqrt{2}$ cm.

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHM, determinaremos a medida AM, ou seja, $AM^2 = AH^2 + (HG + GM)^2 \Rightarrow AM^2 = (3\sqrt{2})^2 + (8)^2 \Rightarrow AM = \sqrt{82}$ cm.

Questão 09 – Letra D

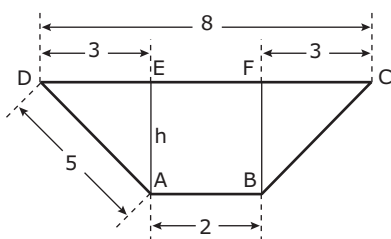
Comentário: As faces de um paralelepípedo retângulo têm por área 6 cm², 9 cm² e 24 cm².

Sendo **a**, **b** e **c** as dimensões desse paralelepípedo retângulo, temos, por exemplo:

$$\begin{matrix} ab = 6 \\ bc = 9 \\ ac = 24 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ab.bc.ac = 6.9.24 \Rightarrow a^2b^2c^2 = 1\,296 \Rightarrow \\ (abc)^2 = (36)^2 \Rightarrow abc = 36 \Rightarrow V = 36 \end{matrix}$$

Portanto, o volume desse paralelepípedo vale 36 cm³.

Questão 10 – Letra D

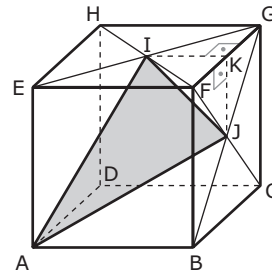
Comentário: Para calcularmos a área da base do prisma, precisamos da medida de **h**.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, temos:

$AD^2 = AE^2 + ED^2 \Rightarrow (5)^2 = h^2 + (3)^2 \Rightarrow h = 4$, pois $h > 0$

Assim, o volume do prisma é:

$$V = \frac{(8+2).4}{2}.5 \Rightarrow V = 100\text{ cm}^3$$

Questão 13 – Letra B

Comentário:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EFG, temos:

$EG^2 = FE^2 + FG^2 \Rightarrow EG^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow EG = a\sqrt{2}$, pois $a > 0$

Como o ponto **I** é o centro da face EFGH, então $EI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AEI, temos:

$$AI^2 = EA^2 + EI^2 \Rightarrow AI^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Trace o segmento IK, tal que IK ⊥ FG.

O segmento IK vale a metade da aresta **a**, ou seja, $IK = \frac{a}{2}$.

Traçando o segmento KJ, temos, analogamente, que $KJ = \frac{a}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo IKJ, temos:

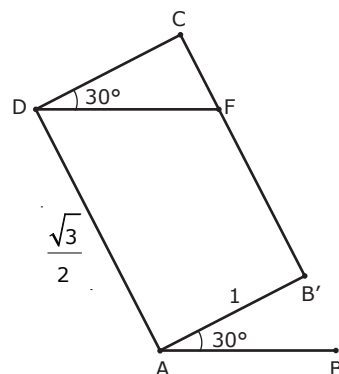
$$IJ^2 = KI^2 + KJ^2 \Rightarrow IJ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}\text{, pois } a > 0$$

Portanto, os segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{IJ}$ são, respectivamente, $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ e $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Questão 14

Comentário: Como não ocorre vazamento de água, podemos igualar as expressões para o volume de água na situação inicial e na final e, com isso, obter o valor de **h**.

Volume de água na caixa-d'água no início: $V_0 = 1.1.h = h$ (I)

Na situação final, teríamos o seguinte caso:

O ângulo CDF será de 30° por ser correspondente a B'AB. Isso ocorre porque a laje na qual a caixa está é horizontal, e, portanto, paralela ao nível da água quando este se estabiliza. Dessa forma, DF // AB. Além disso, o fato de a caixa ser em forma de paralelepípedo faz com que AB' // CD.

O volume de água nessa situação pode ser expresso pelo produto da área do trapézio na figura planificada pela largura da caixa. Para o cálculo da área, precisaremos da medida de FB'.

$CB' = DA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$CF = CD.tg\ 30° \Rightarrow CF = 1.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, $FB' = CB' - CF \Rightarrow FB' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow FB' = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

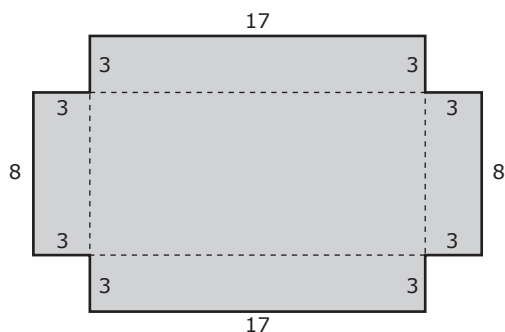
O volume de água na caixa-d'água na situação final é igual ao volume do prisma de base ADFB' e altura 1:

$$V = \frac{(AD + FB')AB'}{2}.1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).1}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (II)$$

Igualando as expressões (I) e (II), temos $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

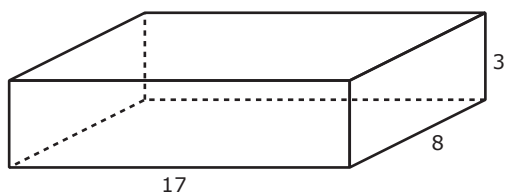
Questão 15

Comentário:

A) Observe a figura a seguir, que representa a folha de papelão após a retirada de um quadrado de lado igual a 3 u.c. de cada canto:

Logo, o perímetro da folha é igual a 2.17 + 2.8 + 3.8 = 74 u.c.

B) A área da folha após a retirada dos quadrados é igual a:

$A = 23.14 - 4.\underbrace{(3.3)}_{\text{Área do quadrado}} \quad A = 286$ u.a.

C) Observe a figura a seguir, que representa a caixa formada com a folha de papelão:

O volume da caixa é 17.8.3 = 408 u.v.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Ao colocarmos o objeto no tanque, temos que o volume de água deslocada será igual ao do objeto. Além disso, podemos observar que o volume de água deslocada correspondente ao volume de um paralelepípedo de dimensões 30 cm x 40 cm x h cm. Logo:

$40.30.h = 2\ 400 \quad h = \frac{2\ 400}{1\ 200} \quad 2$ cm

Assim, o nível de água subiria 2 cm.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Analisando o gráfico, podemos obter a quantidade média mensal de chuva ao longo do ano. Uma vez que a intenção do agricultor é captar toda a água das chuvas ao longo do ano, precisamos saber qual é o volume total dessa água.

Somando as quantidades médias mensais:

Quantidade média de chuva ao longo do ano: 700 mm

Área da superfície do telhado: A = 8.10 = 80 m^2

Cada 100 mm de chuvas equivalem a 100 L/m^2 de superfície. Dessa forma, temos:

Volume total de água: V = 700.80 = 56 000 L = 56 m^3

Esse valor corresponde ao volume mínimo do reservatório. Como a área da base do reservatório é fixa e vale 8 m^2, temos que $p.8 = 56 \Rightarrow p = 7$ m.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: O volume de água a ser escoado corresponde à diferença de 20 m que existe entre a posição inicial do navio e o nível da jusante.

VE = 20.200.17 = 68 000 m^3

O tempo de esvaziamento pode ser obtido pela razão entre a quantidade de água a ser escoada e a velocidade do escoamento.

$$t = \frac{68\ 000\ m^3}{4\ 200\ m^3/\text{minutos}} \cong 16 \text{ minutos}$$

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Se o paralelepípedo e o cubo possuem o mesmo volume, logo:

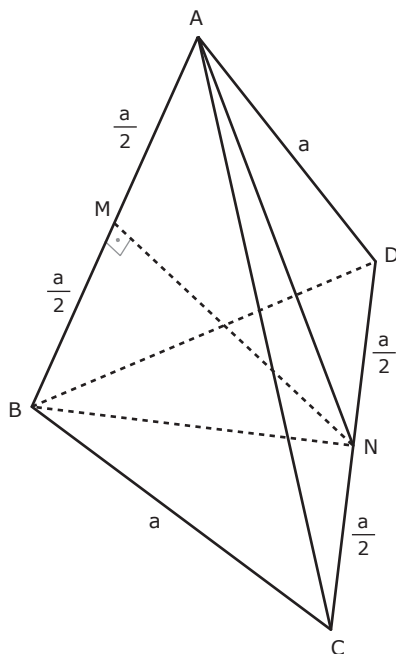
$V_p = V_c \Rightarrow 3.18.4 = a^3 \Rightarrow a = 6$ cm

MÓDULO – B 08

Pirâmides

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir, que representa a geometria da situação:

Sejam **M** e **N** os pontos médios das arestas reversas AB e CD do tetraedro de aresta **a**. Temos que o ΔANB é isósceles, pois dois dos seus lados são alturas das faces do tetraedro. Logo:

$$AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

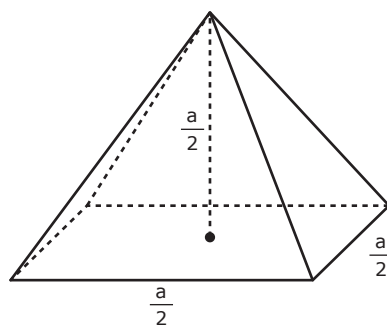
Seja MN a distância entre as duas arestas reversas, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no ΔBNM. Assim:

$$(BN)^2 = (MN)^2 + (BM)^2 \qquad (MN)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(MN)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \qquad (MN)^2 = \frac{2a^2}{4} \qquad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Questão 02 – Letra C

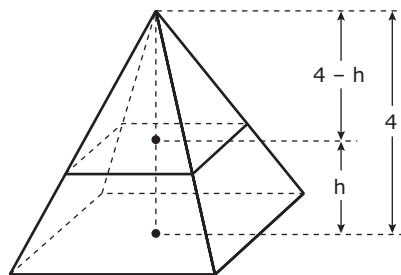
Comentário: A parafina é armazenada em caixas cúbicas de aresta **a**. Logo, o volume de parafina é igual a a^3.

A parafina será derramada em moldes em formato de pirâmides, o que está representado na figura a seguir:

Calculando o volume de cada molde, temos:

$$V_{Molde} = \frac{1}{3}.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a}{2} \qquad V_{Molde} = \frac{a^3}{24}$$

Portanto, a quantidade de parafina pode encher $\dfrac{a^3}{\frac{a^3}{24}} = 24$ moldes.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Na figura a seguir, temos uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm seccionada por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais.

Sejam **h** a altura do tronco da pirâmide e **V** o volume do tronco da pirâmide e da pirâmide pequena.

Assim, da semelhança das pirâmides grande e pequena, temos:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{4}{4-h}\right)^3 \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{4}{4-h}$$

$$4 - h = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow h = 4 - 2\sqrt[3]{4} \text{ cm.}$$

Portanto, para que a pirâmide pequena tenha um volume igual ao tronco da pirâmide, temos de seccionar a pirâmide grande por um plano paralelo ao plano da base, a uma altura de $4 - 2\sqrt[3]{4}$ cm do plano da base.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Seja uma pirâmide quadrangular e regular cujas arestas da base medem **a** e altura mede **h**. Temos que seu volume **V** é igual a:

$$V = \frac{1}{3}.a^2.h \qquad V = \frac{a^2.h}{3}$$

Duplicando a medida da aresta e reduzindo à metade o valor da altura, temos uma nova pirâmide cujo volume V' vale:

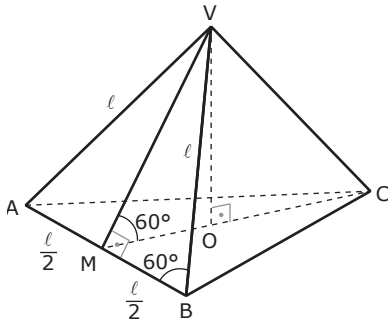
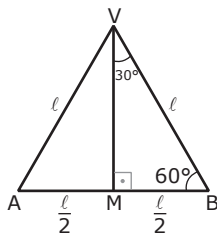
$$V' = \frac{1}{3}.(2a)^2.\frac{h}{2} \qquad V' = \frac{2a^2.h}{3}$$

Fazendo a razão entre os volumes, temos que:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{a^2.h}{3}}{\frac{2a^2.h}{3}} \qquad \frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \qquad V = 2V'$$

Logo, o volume da pirâmide foi duplicado.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir.

Na face VAB, que é um triângulo equilátero de lado ℓ, temos:

$$\ell^2 = VM^2 + \left(\frac{\ }{2}\right)^2 \Rightarrow VM = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{, pois } \ell > 0$$

Traçando a altura VO, temos o triângulo VOM, em que:

$$\text{sen } 60° = \frac{VO}{VM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{VO}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow VO = \frac{3}{4}$$

Logo, o volume da pirâmide VABC é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$$

Exercícios Propostos

Questão 05

Comentário: O volume da pirâmide depende da área de sua base e de sua altura. Para calculá-lo, precisamos escrever as arestas da base e a altura em função de **a**.

Sendo **x** a medida da altura e das arestas da base da pirâmide, temos que o volume da pirâmide vale:

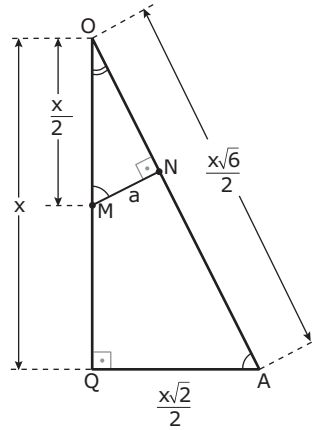
$$V = \frac{1}{3}x^2.x \Rightarrow V = \frac{1}{3}x^3 \quad (I)$$

A diagonal da base ABCD vale $x\sqrt{2}$.

Como **Q** é ponto médio da base ABCD, então $AQ = x\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OQA, temos:

$$AO^2 = QO^2 + QA^2 \Rightarrow AO^2 = x^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$AO = \frac{x\sqrt{6}}{2}\text{, pois } x > 0$$

Como o triângulo OMN é semelhante ao triângulo OAQ, temos:

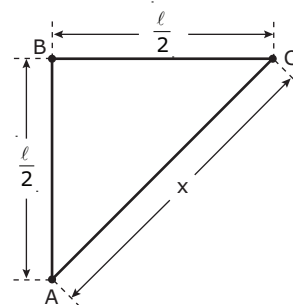
$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\frac{x\sqrt{2}}{2}} \qquad x = 2a\sqrt{3} \text{ (II)}$$

Substituindo a equação II na equação I, temos:

$$V = \frac{1}{3}.(2a\sqrt{3})^3 \Rightarrow V = 8\sqrt{3}a^3$$

Questão 07 – Letra E

Comentário: O volume do octaedro pode ser dividido entre os volumes das duas pirâmides quadradas que o compõem e cujas bases são coincidentes.

Como o octaedro é formado pela união dos pontos centrais de cada face, ele só pode ser um octaedro regular, uma vez que as distâncias do ponto central de uma face aos pontos centrais das faces adjacentes são sempre as mesmas.

Sejam **A** e **C** dois vértices adjacentes do octaedro e **B** o ponto médio de uma das arestas do cubo, e seja **x** a medida do lado do octaedro. Por Pitágoras, encontramos que $x = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Com a medida do lado do octaedro, podemos calcular o volume das duas pirâmides que o compõem e, assim, determinar seu volume.

Seja **h** a altura da pirâmide:

$$2h = \ell \Rightarrow h = \frac{\ }{2}$$

Portanto, o volume do octaedro, em cm^3, é:

$$V = 2.\frac{1}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\ }{2} \Rightarrow V = \frac{^3}{6}$$

Questão 08

Comentário: Seja **A** o valor da área do triângulo AFI.

Igualando o volume do cubo ao volume do tetraedro:

$$V_{cubo} = V_{tetraedro} \Rightarrow V_{ABCDEFGH} = V_{ADFI} \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}.A.1 \Rightarrow A = 3\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\frac{(AF.AI)}{2} = 3 \Rightarrow AI = 6 \Rightarrow AB + BI = 6 \Rightarrow$$

$$BI = 6 - 1 \Rightarrow BI = 5$$

Portanto, BI = 5 cm.

Questão 10 – Letra A

Comentário: $CD = AD.tg\ 60° = 3\sqrt{3}$, já que CD é perpendicular a AD.

Pela Lei dos Cossenos no triângulo ADB em relação ao ângulo **D**, obtemos que o cosseno de ADB vale 0.

Logo, ADB = 90°.

Assim, a área do triângulo ADB vale $\frac{AD.BD}{2} = \frac{3.4}{2} = 6\ m^2$.

Portanto, o volume do tetraedro, em m^3, vale:

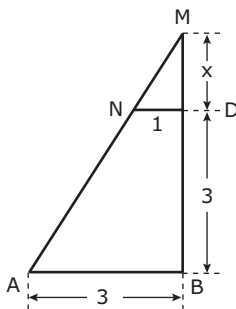
$$V = \frac{1}{3}.6.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Questão 13 – Letra B

Comentário: Para calcularmos o volume da pirâmide MNPD, podemos calcular, primeiramente, o volume da pirâmide MABC e, em seguida, multiplicá-lo pela razão de semelhança.

Seja **A** a área do triângulo MAB:

$$V_{MABC} = \frac{1}{3}.A.BC = \frac{1}{3}.A.3 = A$$

Considere a figura a seguir.

Como os triângulos MND e MAB são semelhantes, então temos:

$$\frac{ND}{AB} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Daí, a área **A** do triângulo MAB é:

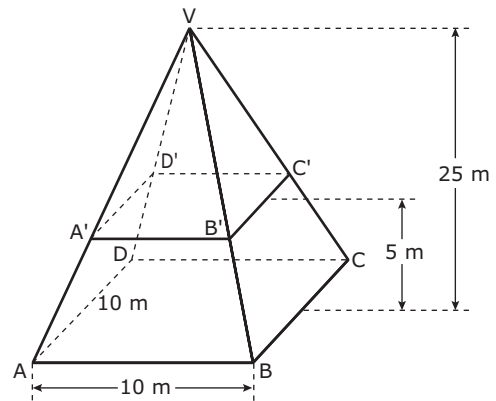
$$A = \frac{MB.AB}{2} = \frac{1}{2}.\frac{9}{2}.3 = \frac{27}{4}$$

Como as pirâmides MNPD e MABC são semelhantes, então temos:

$$\frac{V_{MNPD}}{V_{MABC}} = \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}\right)^3 = \frac{1}{27} \qquad V_{MNPD} = V_{MABC}.\frac{1}{27} = \frac{1}{3}.\frac{27}{4}.3.\frac{1}{27} = \frac{1}{4}$$

Portanto, $V_{MNPD} = \frac{1}{4}$.

Questão 14 – Letra C

Comentário:

As pirâmides VA'B'C'D' e VABCD são semelhantes.

Assim, sendo V_1 e V_2 os volumes, em cm^3, das pirâmides VA'B'C'D' e VABCD, respectivamente, temos:

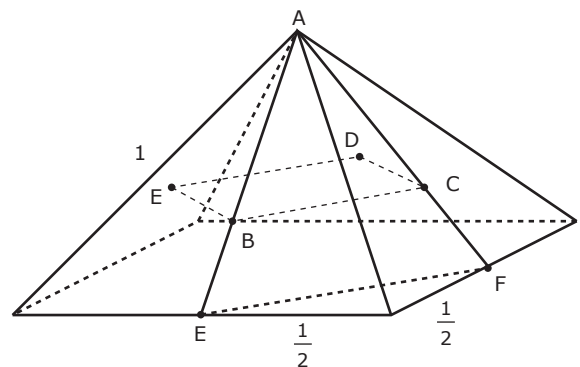
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{20}{25}\right)^3 \Rightarrow V_1 = \frac{64}{125}V_2$$

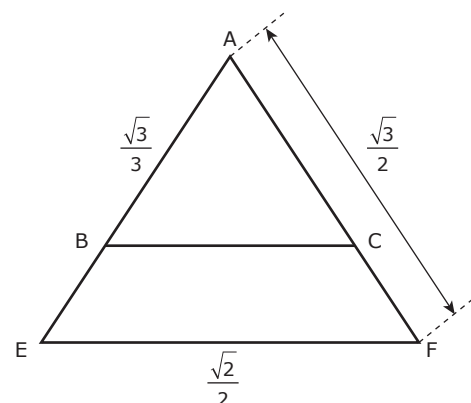
Sendo V_T o volume, em m^3, do tronco ABCDA'B'C'D', temos:

$$V_T = V_2 - V_1 = V_2 - \frac{64}{125}V_2 = \frac{61}{125}V_2 \Rightarrow$$

$$V_T = \frac{61}{125}.\frac{1}{3}.(10)^2.25 \Rightarrow V_T = \frac{1\,220}{3}$$

Questão 15 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Os pontos **B**, **C**, **D** e **E** são os baricentros de cada face da pirâmide e os vértices do quadrado BCDE. Podemos observar que o Δ ABC é isósceles e que $AB = AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Extraindo o Δ AEF da pirâmide temos:

Temos que BC // EF, logo, Δ ABC ~ Δ AEF. Utilizando a semelhança:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\frac{BC}{\sqrt{2}} \qquad BC = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, a área do quadrado BCDE é igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Pelas hipóteses, concluímos que a altura da pirâmide que forma a vela é 16 cm e que a altura da pirâmide pequena é 4 cm.

Logo, o volume, em cm^3, de parafina para fabricar o novo modelo de vela é igual a:

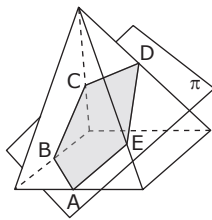
$$V = \frac{1}{3}.6^2.16 - \frac{1}{3}.(1,5)^2.4 \Rightarrow V = 189$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

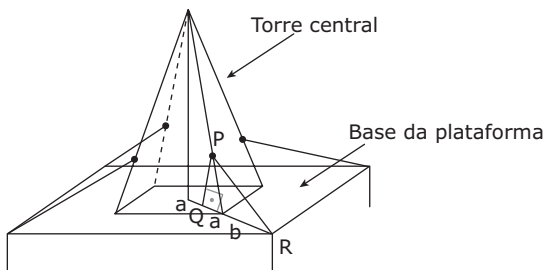
Comentário: Considere a figura a seguir.

Um plano π intercepta todos os lados da pirâmide anterior, formando o pentágono em destaque.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir.

Seja o triângulo PQR, como mostrado na figura. Como o ponto **P** é ponto médio da aresta lateral da pirâmide, temos que a projeção do ponto **P** na base quadrada da pirâmide se encontra no ponto **Q**, e essa projeção vale $\frac{24\,m}{2} = 12\,m$. Como o lado da base da torre vale $6\sqrt{2}$ m, a diagonal vale 12 m. Logo:

$$a = \frac{1}{4}.12 = 3\,m$$

O lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m e, com isso, a diagonal mede 38 m. Logo:

$2(2a + b) = 38 \Rightarrow b = 13$

Portanto, o tamanho da corda pode ser determinado calculando-se o valor da hipotenusa no triângulo PQR:

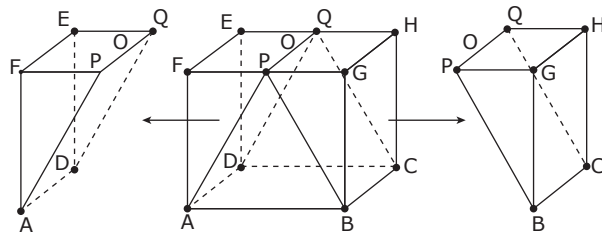
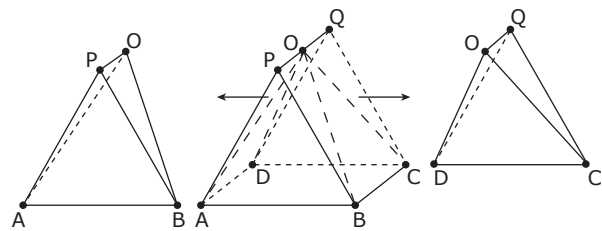
$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \Rightarrow PR^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow PR = \sqrt{400}$, pois PR > 0

Questão 04– Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

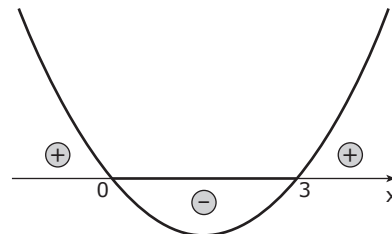
Comentário: Os sólidos descartados após os dois primeiros cortes, que saem de **O** em direção às arestas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, são dois prismas triangulares congruentes, AFPQDE e BGPQCH.

Os outros dois sólidos descartados após os dois últimos cortes, que saem de **O** em direção às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, são dois tetraedros congruentes, ABOP e CDOQ.

Portanto, os formatos dos sólidos destacados são iguais dois a dois.

MÓDULO – C 07

Inequações

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

Comentário: Resolvendo a inequação: $x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow x.(x-3) \leq 0$. As raízes são 0 e 3. Assim, fazendo estudo de sinal, temos:

A solução da inequação é $0 \leq x \leq 3$.

Portanto, o conjunto das soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x \leq 0$ é {0, 1, 2, 3}.

Questão 02 – Letra D

Comentário:

A: $x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 3$

B: $x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 5$

Assim, temos:

$\frac{x}{2} + 3 > \frac{x}{3} + 5 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 5 - 3 \Rightarrow x > 12$

Questão 03 – Letra E

Comentário: Sabendo que as placas não podem ser cortadas e que a altura do portão é 3 m, temos que o número de placas utilizadas para fabricar o portão é igual a 3n, com **n** sendo o número de placas sobre o eixo horizontal. Desse modo, como o eixo pode suportar até 250 kg, temos: $3n.15 \le 250 \Rightarrow n \le 5,5$.

Assim, o número máximo de placas que podem ser utilizadas sobre o eixo é igual a 5 e, portanto, como cada placa tem comprimento igual a 1 m, a largura máxima do portão é 5.1 m = 5 m.

Questão 04 – Letra A

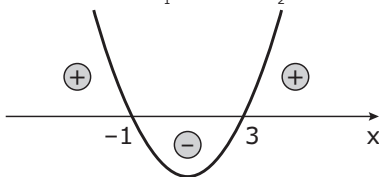
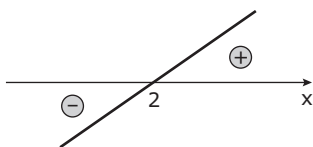
Comentário:

$$\frac{\overset{y_1}{x^2 - 2x - 3}}{\underset{y_2}{x - 2}} \ge 0$$

Condição de existência: $x \neq 2$

Estudo de sinais:

$y_1 = x^2 - 2x - 3$

raízes: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ ou $x_2 = 3$

Quadro de sinais:

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 2$ ou $x \ge 3\}$, ou seja, $[-1, 2) \cup [3, +\infty)$.

Questão 05 – Letra D

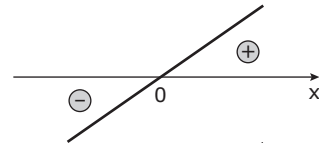
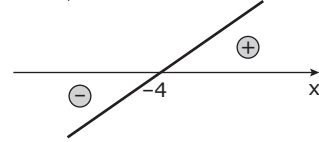
Comentário:

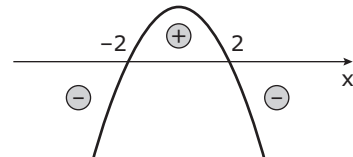
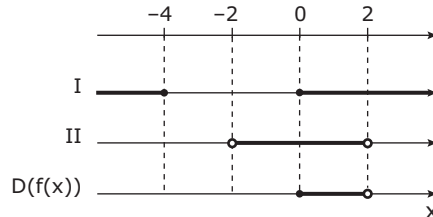
$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Condições de existência: $x \neq -4$ e $x \neq \pm 2$

Temos: $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{x+4} \ge 0 \text{ (I)} \\ 4 - x^2 > 0 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) $\frac{\overset{y_1}{3x}}{\underset{y_2}{x+4}} \ge 0$

Estudo de sinais:

Quadro de sinais:

(II) $\underset{y_3}{4 - x^2} > 0$

O domínio é dado pela interseção das soluções I e II:

Portanto, $D(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\}$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário:

$2x + 3 \le x + 7 \le 3x + 1$

- Seja a inequação $2x + 3 \le x + 7$. Resolvendo-a, temos $x \le 4$.
- Seja a inequação $x + 7 \le 3x + 1$. Resolvendo-a, temos $x \ge 3$.

Logo, apenas os números inteiros 3 e 4 satisfazem a inequação.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Sejam C_X e C_Y, respectivamente, os custos das traduções realizadas pelos profissionais **X** e **Y**. O número mínimo **n** de linhas a serem traduzidas, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **Y** é tal que:

$C_X > C_Y \Rightarrow 3,20.n + 440 > 2,30.n + 800 \Rightarrow 0,9.n > 360 \Rightarrow n > 400$

Assim, n = 401, que é um número ímpar.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Seja **x** o número de usuários. Temos que:

$6x + \underset{\text{Horas adicionais}}{3.(80 - x)} > 320 \Rightarrow 3x > 80 \Rightarrow x > \frac{80}{3}$ 26,7

Logo, x = 27.

Questão 06 – Letra D

Comentário:

$(p-1)x < p-1 \Rightarrow (p-1)x-(p-1) < 0 \Rightarrow (p-1)(x-1) < 0$

Foi dado que **p** é um número real menor do que sua raiz quadrada, $0 < p < 1$. Logo, $p - 1 < 0$. Para que o produto $(p-1)(x-1)$ seja negativo, devemos ter $x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$.

Questão 07 – Letra C

Comentário:

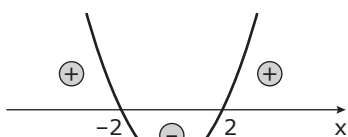
$$\frac{x^2+x-1}{9-x^2} \geq \frac{1}{3-x} \quad \frac{x^2+x-1}{(3+x)(3-x)} - \frac{1}{3-x} \geq 0$$

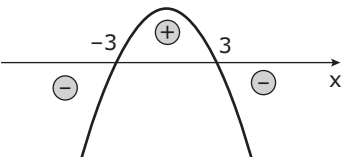
$$\frac{x^2+x-1-(3+x)}{(3+x)(3-x)} \geq 0 \quad \frac{\overset{y_1}{x^2-4}}{\underset{y_2}{9-x^2}} \geq 0$$

Condições de existência: $x \neq -3$ e $x \neq 3$

Estudo de sinais:

I) $y_1 = x^2 - 4$

raízes: -2 e 2

II) $y_2 = 9 - x^2$

raízes: -3 e 3

Quadro de sinais:

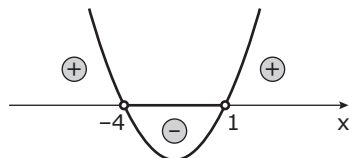
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$, ou seja, $]-3, -2] \cup [2, 3[$.

Questão 08 – Letra A

Comentário: $P(x) = (m + 2)x^2 + 2(m - 3)x + m^2$

$P(1) = m + 2 + 2m - 6 + m^2 < 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 + 3m - 4 < 0}_{\text{Inequação do 2º grau}}$

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-4) = 25$

$m = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow m_1 = -4$ e $m_2 = 1$

Portanto, o maior valor inteiro de **m** é zero.

Questão 09 – Letra E

Comentário: Os valores de **x** para os quais o gráfico da parábola $y = 3x^2 - 4x - 3$ fica abaixo do gráfico da parábola $y = x^2 + 3$ são tais que

$3x^2 - 4x - 3 < x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 < 0$
$x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$.

Questão 11 – Letra D

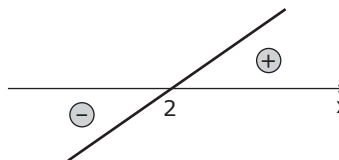
Comentário: $f(x).g(x)$ será positivo nos intervalos de **x** nos quais $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são ambas positivas ou ambas negativas. Isso ocorre para $x < -3$ ou $x > 2$. Portanto, a solução é $S = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

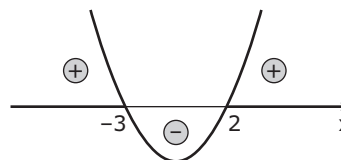
Questão 14

Comentário:

Domínio: $\frac{\overset{y_1}{x-2}}{\underset{y_2}{x^2+x-6}} \geq 0$

I) $y_1 = x - 2$

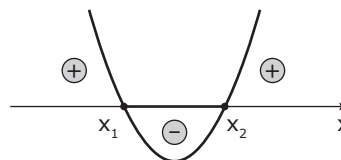
raiz: 2

II) $y_2 = x^2 + x - 6$

raízes: $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ ou $x_2 = 2$

Quadro de sinais:

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ e } x \neq 2\}$.

Questão 17 – Letra C

Comentário: $x^2 + bx + 8 \leq 0$

Sejam x_1 e x_2 as raízes. Temos:

A solução é o intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Temos:

$x_2 - x_1 = 2$, pois é o comprimento do intervalo.

$x_1.x_2 = 8$, pois é o produto das raízes. Logo:

$x_1.(2 + x_1) = 8 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$ ou $x_1 = 2$

Para $x_1 = -4$, temos $x_2 = -2$

Para $x_1 = 2$, temos $x_2 = 4$

Observe que $-b = x_1 + x_2$, pois é a soma das raízes.

No primeiro caso, temos $b = -6$.

No segundo caso, temos $b = 6$.

Logo, $|b| = 6$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Seja **x** o número de peças produzidas. O custo total de produção **C** no mês é dado por $C(x) = 6x + 46\,000$, enquanto a receita da fábrica **R** no mês é dada por $R(x) = 11.x$. Portanto, o lucro mensal **L** é dado por:

$$L(x) = R(x) - C(x) \quad L(x) = 11x - (6x + 46\,000)$$
$$L(x) = 5x - 46\,000$$

Devemos ter $L(x) > 94\,000$. Logo, temos:

$5x - 46\,000 > 94\,000 \Rightarrow 5x > 140\,000 \Rightarrow x > 28\,000$

Como o número máximo de peças que podem ser produzidas por dia é igual a 3 000, o número mínimo de dias necessários para produzir, mais de 28 000 peças é:

$$\frac{28\,000}{3\,000} \quad 9{,}3 \quad 10 \text{ dias}$$

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Para que a empresa não tenha prejuízo, seu lucro deve ser maior ou igual a zero ($LT \geq 0$). Assim: $LT(q) = FT(q) - CT(q) \Rightarrow LT(q) = 5q - (2q + 12) \Rightarrow$

$LT(q) = 3q - 12$

$LT(q) \geq 0 \Rightarrow 3q - 12 \geq 0 \Rightarrow q \geq 4$

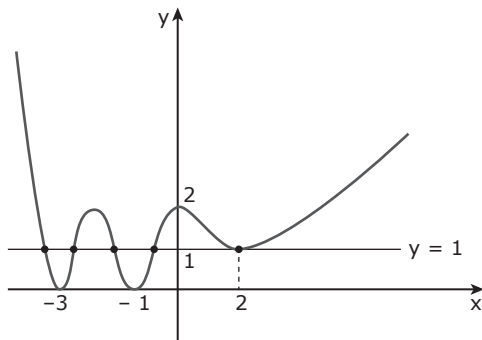
Portanto, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo é 4.

MÓDULO – C 08

Função modular

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: O gráfico da equação modular $|f(x)| = 1$ é dado por:

Logo, temos 5 pontos de intersecção entre as funções $|f(x)|$ e $y = 1$.

Portanto, a equação dada possui 5 raízes.

Questão 02 – Letra A

Comentário: $y = |x|^2 - 5|x| + 6$

Fazendo $|x| = k$, temos:

$y = k^2 - 5k + 6$

Suas raízes são $k = 2$ e $k = 3$.

Para $k = 2 \Rightarrow |x| = 2$, ou seja, $x = \pm 2$.

Para $k = 3 \Rightarrow |x| = 3$, ou seja, $x = \pm 3$.

Portanto, a função se anula para quatro valores de **x**, o que faz da alternativa A a verdadeira.

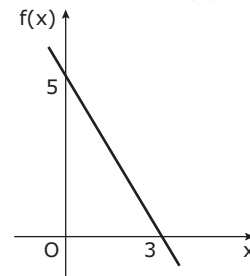
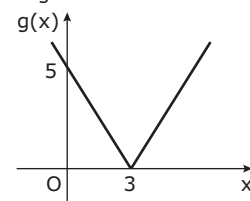
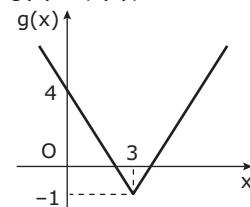
Observação: Análise das demais alternativas:

Alternativa B: A função $y = k^2 - 5k + 6$ possui vértice de coordenadas (k, y) iguais a $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Porém, para $k = \frac{5}{2}$, temos $x = \pm\frac{5}{2}$. Logo, há dois pontos de mínimo: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. (Falsa)

Alternativa C: Conforme visto anteriormente, a função se anula para quatro valores de **x**, e não somente para dois valores. (Falsa)

Alternativa D: A função é par, pois $f(-x) = f(x)$ para qualquer **x** real. (Falsa)

Questão 03 – Letra E

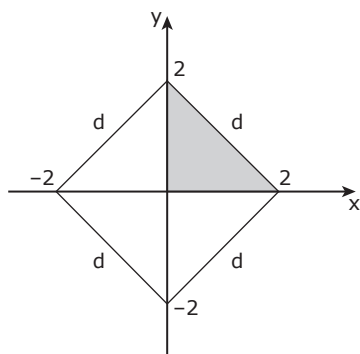
Comentário: O gráfico da função f(x) é:

"Refletindo" a parte do gráfico que possui imagem negativa, em relação ao eixo **x**, obtemos o gráfico da função $|f(x)|$, conforme figura a seguir:

"Deslocando" o gráfico uma unidade para baixo, obtemos o gráfico da função $g(x) = |f(x)| - 1$.

Questão 04 – Letra E

Comentário:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow x + y = 2$.

Se $x \geq 0$ e $y < 0 \Rightarrow x - y = 2$.

Se $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow -x - y = 2$.

Se $x < 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 2$.

Temos um quadrado de lado **d** que pode ser expresso por:

$d^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow d = 2.\sqrt{2}$

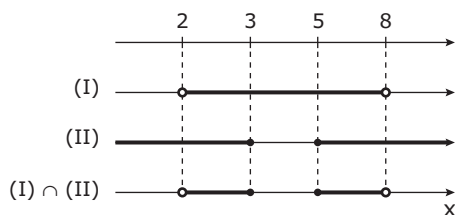
Logo, o perímetro 2p será dado por $2p = 4d = 8\sqrt{2}$.

Questão 05 – Letra E

Comentário:

$|x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < x - 5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$ (I)

$|x - 4| \geq 1 \Rightarrow$ $x - 4 \leq -1$ ou $x - 4 \geq 1$; $x \leq 3$ ou $x \geq 5$ (II)

Interseção das soluções:

As soluções inteiras são 3, 5, 6 e 7, cuja soma é 21.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário:

$1 < |x + 3| < 4$: $-4 < x + 3 < -1$ ou $1 < x + 3 < 4$; $-7 < x < -4$ ou $-2 < x < 1$

Inteiros não nulos: −6, −5, −1 (3 valores)

Questão 02 – Letra C

Comentário: Resolvendo a inequação:

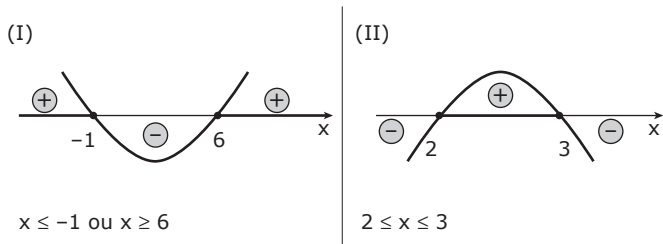
$|x|.|x - 5| \geq 6$ $\quad |x^2 - 5x| - 6 \geq 0$ $\quad x^2 - 5x - 6 \geq 0$ (I) ou $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$ (II)

Fazendo o estudo do sinal, temos:

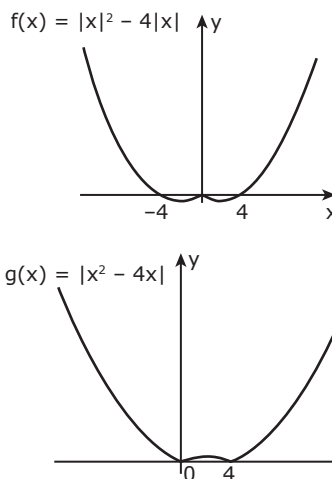
(I)

$x \leq -1$ ou $x \geq 6$

(II)

$2 \leq x \leq 3$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $2 \leq x \leq 3$ ou $x \geq 6\}$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Os gráficos das funções f(x) e g(x) são dados por:

I. Falsa. O gráfico de g(x) não é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

II. Falsa. A equação apresenta infinitas raízes para $x > 4$.

III. Verdadeira. $-4 + 0 + 4 + 0 + 4 = 4$

IV. Falsa. Contraexemplo: $f(2) < g(2)$

Questão 04 – Letra A

Comentário: $|x^2| - 4|x| - 5 = 0 \Rightarrow |x|^2 - 4|x| - 5 = 0 \Rightarrow$ fazendo $|x| = L$, temos:

$L^2 - 4L - 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.(-5) = 16 + 20 = 36$

$L = \dfrac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow L = 5$ (convém) $L = -1$ (não convém)

$|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Gráfico de f(x):

$f(x) = |x^2| + |x| \Rightarrow f(x) = x^2 + |x|$

I) Se $x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - x$; função I

II) Se $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + x$; função II

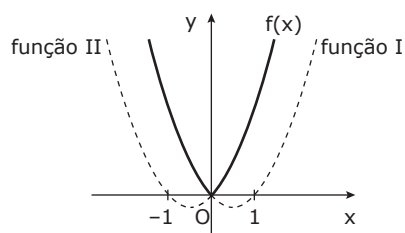



Gráfico de f(x + 1):

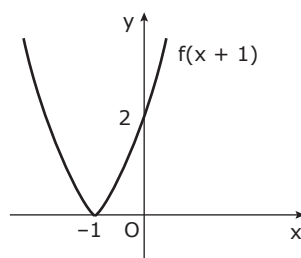
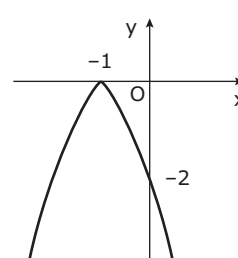



Gráfico de −f(x + 1):

Questão 06 – Letra C

Comentário:

Conjunto A

$|x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < x - 5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$

Conjunto B

$$|x - 4| \geq 1 \Rightarrow \begin{matrix} x - 4 \leq -1 \\ \text{ou} \\ x - 4 \geq 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \leq 3 \\ \text{ou} \\ x \geq 5 \end{matrix}$$

$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3, 5, 6, 7\}$

Soma = 3 + 5 + 6 + 7 = 21

Questão 07 – Letra B

Comentário: $f(x) = y = |2x^2 - 8|$

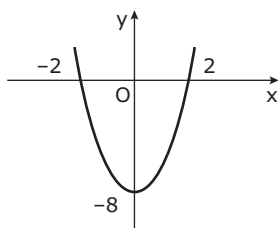
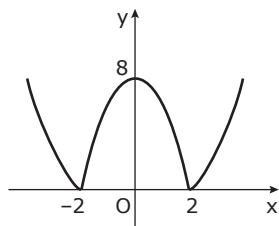
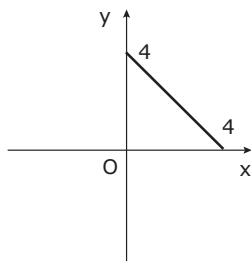
Gráfico de $y = 2x^2 - 8$; raízes: −2 e 2

Basta, agora, "rebatermos", em relação ao eixo **x**, a parte do gráfico que possui ordenada negativa.

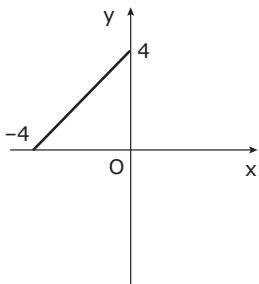
Gráfico de $y = f(x)$

Questão 09 – Letra A

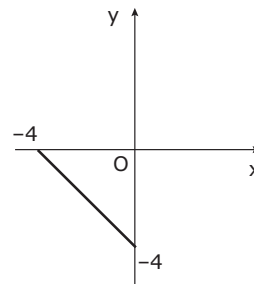
Comentário: $|x| + |y| = 4$

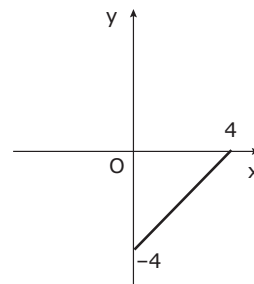
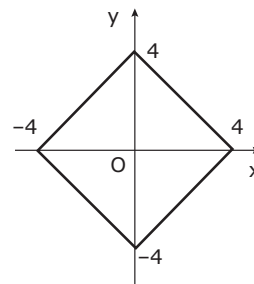
Há 4 possibilidades:

1ª) $x > 0$ e $y > 0$

Temos: $x + y = 4 \Rightarrow y = -x + 4$

2ª) $x < 0$ e $y > 0$

$-x + y = 4 \Rightarrow y = x + 4$

3ª) $x < 0$ e $y < 0$

$-x - y = 4 \Rightarrow y = -x - 4$

4ª) $x > 0$ e $y < 0$

$x - y = 4 \Rightarrow y = x - 4$

Justapondo esses gráficos, obtemos:

Questão 14 – Letra B

Comentário: Determinação da expressão da função g(x):

$g(x) = ax + b$

$$\begin{matrix} g(3) = 2 \\ g(2) = -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{matrix} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = -7$$

Portanto, $g(x) = 3x - 7$.
Sabemos que $f(x) = |x - 1|$ e $f(x) \leq g(x)$. Logo:

$|x - 1| \leq 3x - 7 \Leftrightarrow -3x + 7 \leq x - 1 \leq 3x - 7 \Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} -3x + 7 \leq x - 1 \\ \text{e} \\ x - 1 \leq 3x - 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 8 \leq 4x \\ \text{e} \\ 6 \leq 2x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \geq 2 \\ \text{e} \\ x \geq 3 \end{matrix}$$

A interseção das soluções das duas inequações é dada por: $x \geq 3$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como o número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da reta real, temos que:

$$\begin{matrix} |Y - 2| + 4 = -10 \\ \text{ou} \\ |Y - 2| + 4 = 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} |Y - 2| = -14 \text{ (absurdo)} \\ \text{ou} \\ |Y - 2| = 6 \end{matrix}$$

$$Y - 2 = -6 \qquad Y = -4$$
ou ou
$$Y - 2 = 6 \qquad Y = 8$$

Como **Y** é natural, então temos que Y = 8.

Observe que 8 é divisor de 56.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário: Temos:

$$\left| |x_0 - 1| - 1 \right| = 6$$

Então:

$$|x_0 - 1| - 1 = 6 \qquad |x_0 - 1| = 7$$

$$|x_0 - 1| - 1 = -6 \qquad |x_0 - 1| = -5 \text{ (absurdo)}$$

$$x_0 - 1 = 7 \qquad x_0 = 8$$

$$x_0 - 1 = -7 \qquad x_0 = -6$$

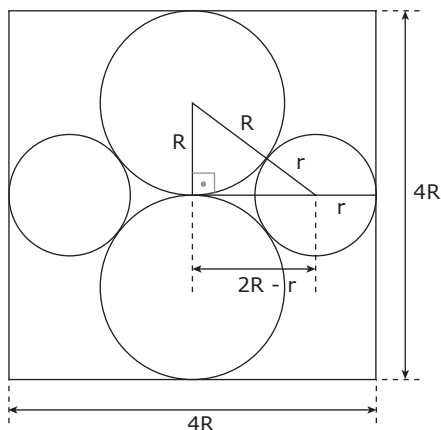
Portanto, existem 2 valores reais.

MÓDULO – D 07

Triângulo retângulo

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

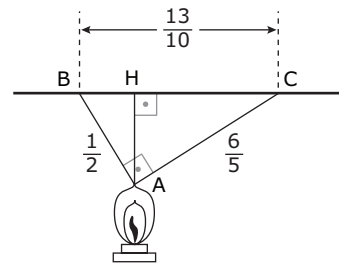
Comentário: Observe a figura a seguir:

Com base na figura, podemos observar que o quadrado possui lado igual a 4R. O triângulo retângulo possui hipotenusa igual a R + r e catetos iguais a R e 2R – r. Logo, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2 \qquad R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 + 4R^2 - 4Rr + r^2$$

$$6Rr = 4R^2 \qquad 6r = 4R \qquad \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

Portanto, $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir.

Foi dado que AB ⊥ AC e AB = $\frac{1}{2}$ e AC = $\frac{6}{5}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

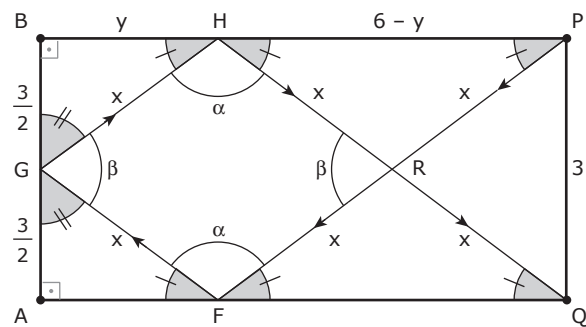
$$BC^2 = \frac{1}{2}^2 + \frac{6}{5}^2 \qquad BC = \frac{13}{10}$$

Traçando a altura AH relativa à hipotenusa BC, temos:

$$BC.AH = AB.AC \qquad \frac{13}{10}.AH = \frac{1}{2}.\frac{6}{5} \qquad AH = \frac{6}{13}$$

Portanto, a distância do lampião ao teto é $\frac{6}{13}$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:

Temos que ABPQ é um retângulo e, pelo caso AA, o Δ GBH ≡ Δ GAF, logo, GH = GF = x.

O quadrilátero FGHR possui ângulos opostos congruentes, logo, ele é um paralelogramo, no caso um losango, pois possui os quatro lados iguais a **x**. Por paralelismo, temos que QF̂R = HP̂R = PĤR = RQ̂F. Logo, os triângulos HRP e FRQ são isósceles e possuem dois de seus lados iguais a **x**.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos GBH e HPQ, temos:

$$x^2 = y^2 + \frac{3}{2}^2 \qquad x^2 = y^2 + \frac{9}{4} \quad \text{(I)}$$

$$(2x)^2 = (6 - y)^2 + 3^2 \qquad 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 9 \quad \text{(II)}$$

Substituindo I em II:

$$4.\ y^2 + \frac{9}{4} = 36 - 12y + y^2 + 9 \qquad 4y^2 + 9 = 36 - 12y + y^2 + 9$$

$$3y^2 + 12y - 36 = 0 \qquad y_1 = 2 \text{ e } y_2 = -6 \text{ (não convém)}$$

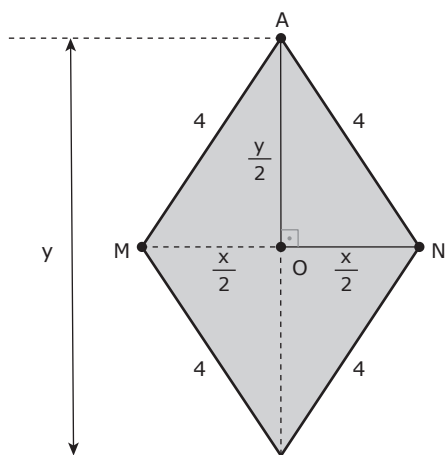
Para y = 2, temos que:

$$x^2 = y^2 + \frac{9}{4} \qquad x^2 = 4 + \frac{9}{4} \qquad x = \frac{5}{2}$$

A distância percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ é igual a 6x, logo:

$$6.x = 6.\frac{5}{2} = 15 \text{ cm}$$

Questão 04 – Letra B

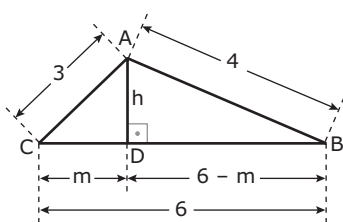
Comentário: Observe a figura a seguir:

Como o triângulo AMN é isósceles, AO é a mediatriz de MN, logo, $MO = ON = \frac{x}{2}$. Os triângulos AMN e BMN são congruentes; Portanto, $AO = OB = \frac{y}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ AON, temos:

$$4^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \frac{y^2}{4} = 16 - \frac{x^2}{4}$$

$$y^2 = 64 - x^2 \qquad y = \sqrt{64 - x^2}$$

Portanto, $y = \sqrt{64 - x^2}$ dm.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir.

Sejam AD = h e CD = m.
Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ADC e ADB, temos:

$$3^2 = m^2 + h^2 \qquad 9 - m^2 = h^2 \qquad \text{(I)}$$
$$4^2 = (6 - m)^2 + h^2 \qquad 16 - (6 - m)^2 = h^2 \qquad \text{(II)}$$

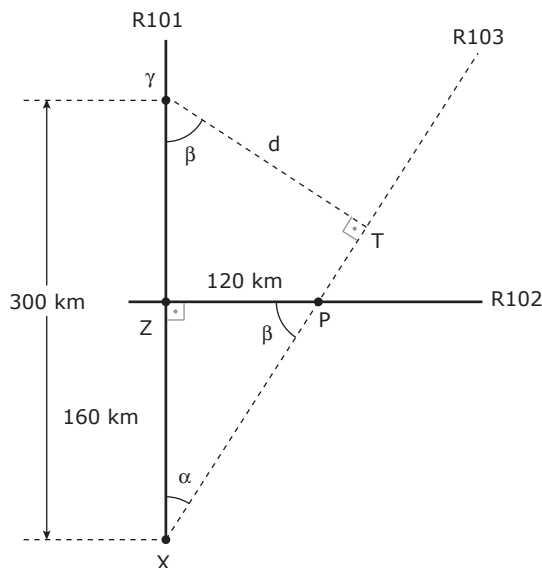
Igualando as equações (I) e (II), temos:

$$9 - m^2 = 16 - (6 - m)^2 \Rightarrow m = \frac{29}{12}$$

Portanto, o valor de CD é $\frac{29}{12}$.

Exercícios Propostos

Questão 04 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir, que representa a geometria da situação:

A menor distância do ponto **Y** até a reta que representa a rodovia R103 ocorre quando YT é perpendicular a XT.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ XZP, temos que:

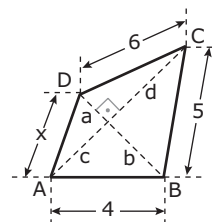
$(XP)^2 = 120^2 + 160^2 \Rightarrow (XP)^2 = 40\,000 \Rightarrow XP = 200$

Os triângulos XTY e XZP são semelhantes pelo caso AA, logo:

$$\frac{300}{200} = \frac{YT}{120} \qquad 2.YT = 360 \qquad YT = 180$$

Portanto, o comprimento da rodovia a ser construída é igual a 180 km.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Seja o seguinte quadrilátero ABCD.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos quatro triângulos retângulos, temos:

$(4)^2 = c^2 + b^2 \qquad \text{(I)}$
$(5)^2 = b^2 + d^2 \qquad \text{(II)}$
$(6)^2 = a^2 + d^2 \qquad \text{(III)}$
$x^2 = a^2 + c^2 \qquad \text{(IV)}$

Fazendo a subtração das equações (II) e (I) e das equações (III) e (IV), respectivamente, temos que:

$9 = d^2 - c^2 \qquad \text{(V)}$

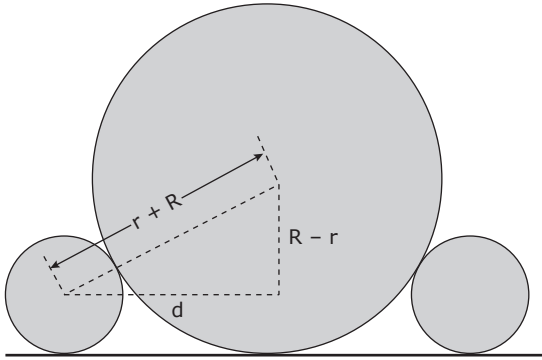
$36 - x^2 = d^2 - c^2 \qquad \text{(VI)}$

Igualando as equações (V) e (VI), temos:

$9 = 36 - x^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$, pois $x > 0$

Portanto, AD vale $3\sqrt{3}$ cm.

Questão 09 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir, com seus dados.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado, temos:

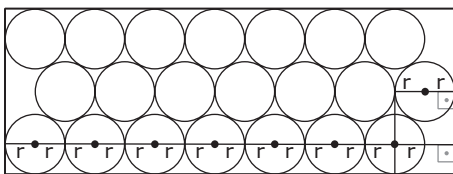
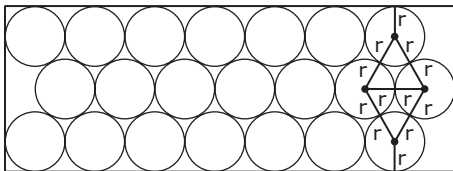
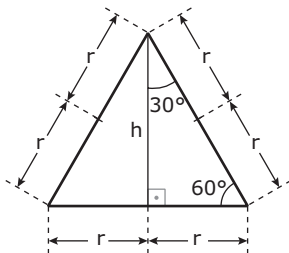
$(r + R)^2 = (R - r)^2 + d^2$

$r^2 + 2Rr + R^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + d^2$

$4Rr = d^2 \qquad d = 2\sqrt{Rr}$

A distância entre os centros das circunferências de raio **r** corresponde a 2d. Assim, $D = 4\sqrt{Rr}$.

Questão 10 – Letra A

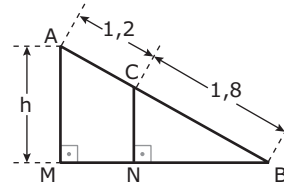
Comentário: Considere a figura a seguir.

O comprimento do maço de cigarros é C = 13r + 2r ⇒ C = 15r.

Seja o triângulo equilátero de lado 2r.

Daí, sen 60° = $\frac{h}{2r} \Rightarrow h = 2r.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = r\sqrt{3}$.

Logo, a largura do maço de cigarros é:

$L = r + r\sqrt{3} + r\sqrt{3} + r \Rightarrow L = 2r\left(1 + \sqrt{3}\right)$

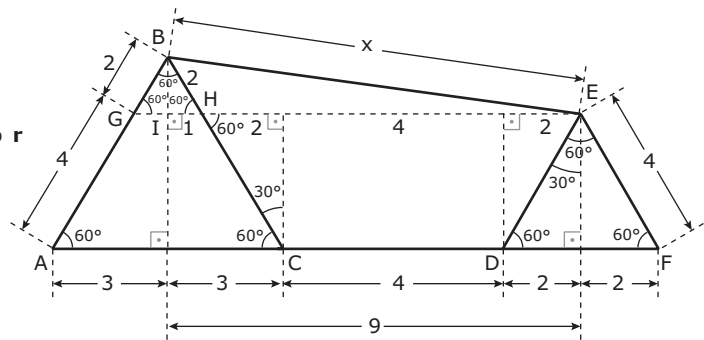
Portanto, as dimensões do maço de cigarro são 15r e $2r\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Quando a extremidade **B** estiver apoiada no chão, teremos a seguinte figura (traçadas também as alturas relativas a **A** e **C**):

A altura relativa ao vértice **C** vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$, uma vez que corresponde à altura de um triângulo equilátero de lado 1. Como os triângulos BCN e BAM são semelhantes, então temos:

$$\frac{CN}{AM} = \frac{BC}{BA} \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{1,8}{3} \qquad h = \frac{5\sqrt{3}}{6}\text{ m}$$

Questão 13

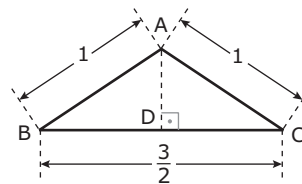
Comentário:

Trace o segmento EG em que EG // FA.

A altura do triângulo equilátero BGH de lado 2, é BI = $\sqrt{3}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BEI, temos:

$BE^2 = BI^2 + EI^2 \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 9^2 \Rightarrow x^2 = 84 \Rightarrow x = 2\sqrt{21}$ cm

Questão 14 – Letra E

Comentário: Ligando os centros das bases dos troncos, obtemos o seguinte triângulo:

O segmento BC mede $\frac{3}{2}$ porque corresponde à medida total da largura do caminhão menos o valor de dois raios, cada um valendo $\frac{1}{2}$.

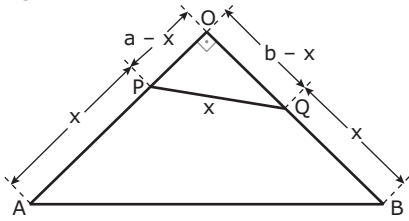
Se traçarmos a altura AD desse triângulo, ela também será mediana, pois o triângulo é isósceles. Assim, poderemos descobrir o valor de AD pelo Teorema de Pitágoras. Logo:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \qquad 1^2 = AD^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad AD = \frac{\sqrt{7}}{4}\text{, pois } AD > 0$$

A altura **h** corresponde à soma de dois raios das bases dos troncos com a distância vertical entre dois centros. Essa distância é igual a AD.

Assim, $h = 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Questão 15 – Letra B

Comentário:

Pelo Teorema de Pitágoras em OPQ:

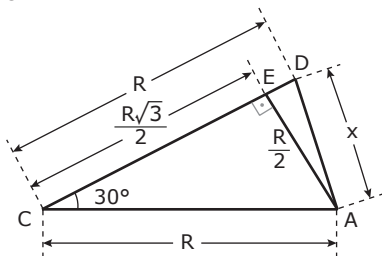
$x^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ax + 2bx - x^2 \Rightarrow$
$x^2 - x(2a + 2b) + a^2 + b^2 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, chegamos a duas possíveis soluções:

$x = a + b + \sqrt{2ab}$ ou $x = a + b - \sqrt{2ab}$

Mas $x < a$. Logo, $x = a + b - \sqrt{2ab}$.

Questão 17 – Letra A

Comentário:

Sabe-se que $DE = AD - CE = R - \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Assim, aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, temos:

$(AD)^2 = (DE)^2 + (AE)^2 \Rightarrow x^2 = \left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$x^2 = R^2 - R^2\sqrt{3} + \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{4} \Rightarrow$

$x^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = R^2(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow x = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, pois $x > 0$

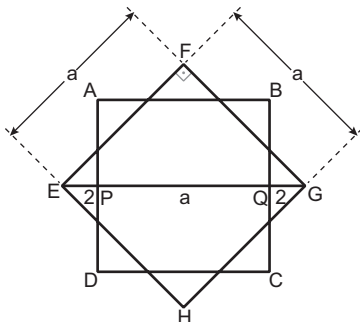
Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir.

Sendo $Q \in BC$ e $Q \in GE$, podemos afirmar que $GQ = EP = 2$, pois essa figura é simétrica. O lado $PQ = AB = a$. Assim:
$GE = EP + PQ + GQ \Rightarrow GE = 2 + a + 2 \Rightarrow GE = 4 + a$ (I)

Como o lado GE é a diagonal do quadrado EFGH, então:

$GE = a\sqrt{2}$ (II)

Assim, de (I) e (II), temos:

$4 + a = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow a = 4(\sqrt{2} + 1)$ cm

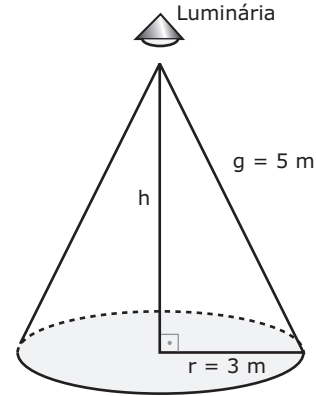
Questão 02 – Letra B

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sabemos que a luminária iluminará uma área circular de 28,26 m², sendo $\pi \cong 3{,}14$; temos, então, que o raio dessa área vale: $\pi r^2 = 28{,}26\ m^2 \Rightarrow r = 3$ m.

Assim:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h = 4$ m

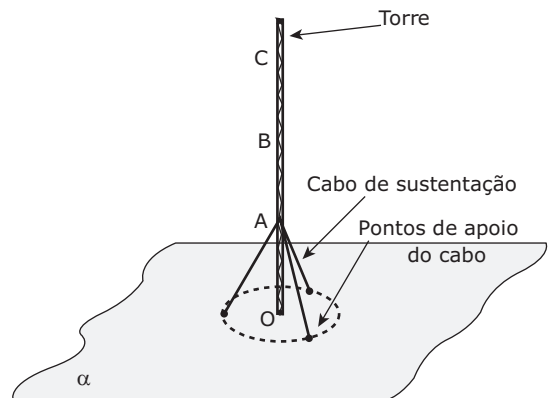
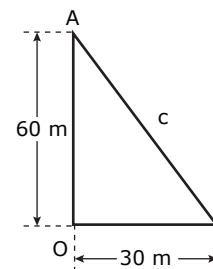
Portanto, a altura **h** será igual a 4 m.

Questão 03 – Letra D

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Os cabos com apoio na circunferência de raio 30 m, estão fixados no ponto **A** da torre.

Temos três cabos com a seguinte configuração:

Em que **c** é o comprimento de um cabo.

Assim, $c^2 = 60^2 + 30^2 \Rightarrow c = 30\sqrt{5}$.

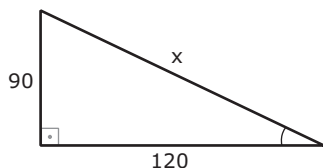
Portanto, o valor mínimo de cabo, com apoio na circunferência de raio 30 m, usado na sustentação da torre, é $90\sqrt{5}$ metros.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe a figura a seguir, com seus dados.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 120^2 + 90^2 \Rightarrow x = 150$

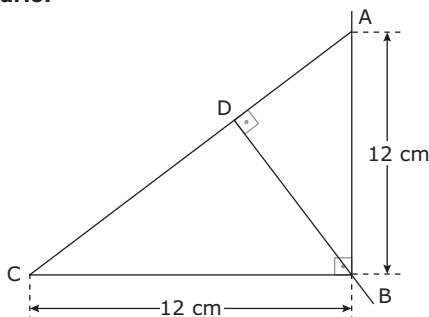
Logo: comp. total = 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1 m

Questão 05 – Letra E

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow AC^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow AC = 20$ cm

Pela semelhança de triângulos, entre o triângulo ABC e o triângulo BCD, temos:

$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AC.BD = BC.AB \Rightarrow 20.BD = 16.12 \Rightarrow BD = 9,6$ cm

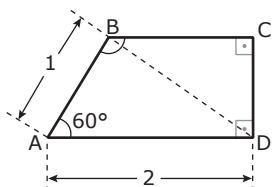
Portanto, nessa engrenagem, a altura BD do triângulo ABC é 9,6 cm.

MÓDULO – D 08

Lei dos senos e lei dos cossenos

Exercícios de Fixação

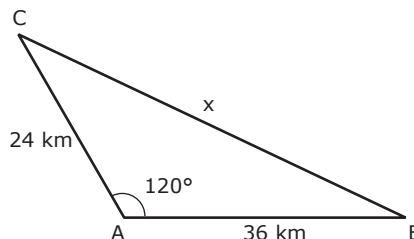
Questão 01 – Letra A

Comentário:

Como $A\hat{B}C = 120°$ e $B\hat{C}D = A\hat{D}C = 90°$, então $B\hat{A}D = 60°$.

Traçando o segmento BD, temos o triângulo ABD. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$BD^2 = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos 60° \Rightarrow BD = \sqrt{3}$, pois BD > 0.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Observe a figura com seus dados.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

$x^2 = 24^2 + 36^2 - 2.24.36.\cos 120°$

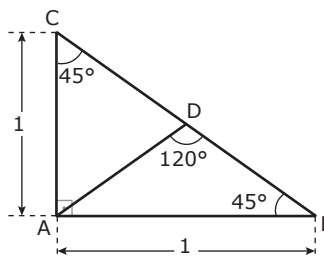
$x^2 = 576 + 1\,296 - 1\,728.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 1\,872 + 864 \quad x = \sqrt{2\,736} \quad x = 12\sqrt{19}$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Pela Lei dos Senos, temos:

$\frac{AB}{\text{sen } 60°} = 2R \quad \frac{80}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \quad R = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ m

Questão 04 – Letra A

Comentário:

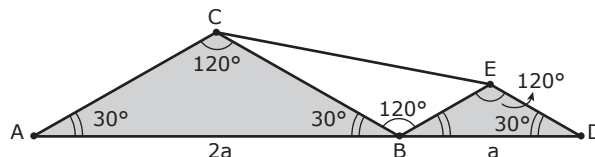
O triângulo retângulo ABC é isósceles, pois AB = AC.

Assim, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 45°$.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD, temos:

$\frac{1}{\text{sen } 120°} = \frac{AD}{\text{sen } 45°} \quad AD = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Questão 05 – Letra C

Comentário:

Aplicando a Lei dos Senos, temos:

ACB:

$\frac{2a}{\text{sen } 120°} = \frac{BC}{\text{sen } 30°} \quad \frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2}} \quad BC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

BDE:

$\frac{a}{\text{sen } 120°} = \frac{BE}{\text{sen } 30°} \quad BE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lei dos Cossenos no Δ CBE:

$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2.(BC)(BE).\cos 120°$

$CE^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$CE^2 = \frac{5a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} \quad CE^2 = \frac{7a^2}{3} \quad CE = a\sqrt{\frac{7}{3}}$

Exercícios Propostos

Questão 06 – Letra A

Comentário: Como o triângulo ABC é equilátero, $\hat{A} = 60°$.

Seja a medida de PM = x.

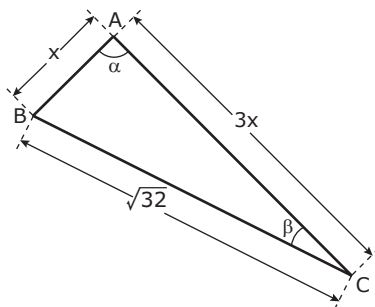
Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo APM em relação ao ângulo $\hat{A}$, temos:

$x^2 = 3^2 + 2^2 - 2.3.2.\cos 60° \Rightarrow x = \sqrt{7}$

Portanto, o perímetro do triângulo APM vale:

$2p = AP + PM + AM = 3 + \sqrt{7} + 2 = 5 + \sqrt{7}$

Questão 08 – Letra A

Comentário:

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AB.AC.\cos\alpha \Rightarrow$

$(\sqrt{32})^2 = x^2 + (3x)^2 - 2.x.3x.\frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$, pois $x > 0$

Como $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, pela Relação Fundamental temos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \frac{1}{3}^{2} = 1 \Rightarrow$

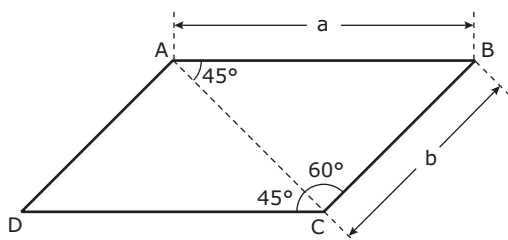
$\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, pois $\text{sen}\,\alpha > 0$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC, temos:

$\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{2}{\text{sen}\,\beta}$ $\quad \frac{\sqrt{32}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2}{\text{sen}\,\beta}$ $\quad \text{sen}\,\beta = \frac{1}{3}$

Como $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{3} < \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$, então $\beta < 30°$, pois, no intervalo de 0 a 30°, a função seno é crescente.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Seja o paralelogramo ABCD, em que a diagonal AC divide o ângulo interno $\hat{C}$ em um de 60° e outro de 45°.

Sejam **a** e **b** os lados maior e menor, respectivamente, do paralelogramo.

O ângulo $B\hat{A}C = D\hat{C}A = 45°$, pois esses ângulos são alternos internos.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC, temos que:

$\frac{b}{\text{sen}\,45°} = \frac{a}{\text{sen}\,60°}$ $\quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Questão 12 – Letra E

Comentário: Seja **α** o ângulo formado pelos lados **x** e **y**.

Logo, $\alpha = 30°$, para que a soma dos ângulos dê 180°.

Pela Lei dos Senos relativa aos ângulos de 30° e 135°, temos:

$\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,30°} = \frac{x}{\text{sen}\,135°} \Rightarrow x = 2$

Pela Lei dos Senos relativa aos ângulos de 30° e 15°, temos:

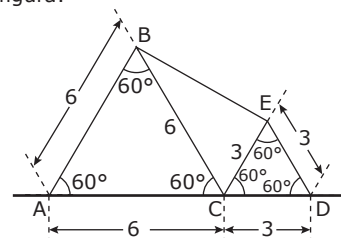
$\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,30°} = \frac{y}{\text{sen}\,15°} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,15° \Rightarrow$

$y = 2\sqrt{2}.\text{sen}\,(45° - 30°) \Rightarrow$

$y = 2\sqrt{2}.[\,\text{sen}\,45°.\cos 30° - \text{sen}\,30°.\cos 45°] \Rightarrow$

$y = 2\sqrt{2}.\ \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{3} - 1$

Questão 14 – Letra A

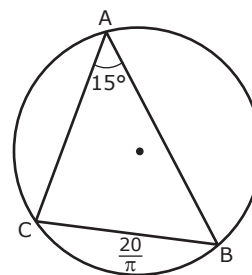
Comentário: De acordo com os dados do enunciado, temos a seguinte figura:

Sabemos que o ângulo $B\hat{C}E = 60°$ já que ele é suplementar à soma de dois ângulos de 60° (que são os ângulos dos triângulos).

Pela Lei dos Cossenos no triângulo BCE em relação ao ângulo $B\hat{C}E$, temos:

$(BE)^2 = 6^2 + 3^2 - 2.6.3.\cos 60° \Rightarrow BE = 3\sqrt{3}$

Portanto, o perímetro do quadrilátero ABED vale:

$2p = 6 + 3\sqrt{3} + 3 + 3 + 6 \Rightarrow 2p = 18 + 3\sqrt{3} = 3(6 + \sqrt{3})$

Questão 16 – Letra A

Comentário:

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC inscrito na circunferência de raio **R**, temos que:

$\frac{BC}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$ $\quad \frac{\frac{20}{\pi}}{\text{sen}\,15°} = 2R$ $\quad R = \frac{10}{\pi.\text{sen}(45° - 30°)}$

$R = \frac{10}{\pi\ \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\quad R = \frac{40}{\pi\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)}$

Logo, o comprimento da circunferência é:

$C = 2\pi R \Rightarrow C = 2\pi.\frac{40}{\pi\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)} \Rightarrow$

$C = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow C = 20\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$

Questão 17 – Letra D

Comentário: Aplicando a Lei dos Senos, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = \frac{200}{\text{sen } 45°} \quad \frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad AB = 100\sqrt{2}$$

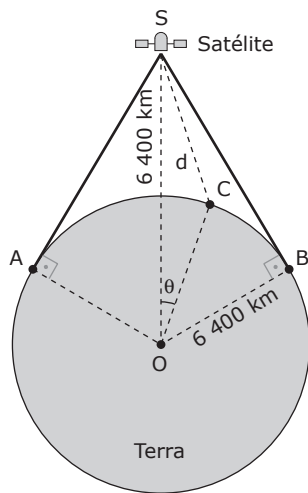
Questão 18 – Letra B

Comentário: Aplicando a Lei dos Senos no Δ ABC, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen } 30°} = \frac{50}{\text{sen } 45°} \quad BC = 25\sqrt{2}$$

Dado o triângulo retângulo BCD, $\text{sen } 30° = \frac{h}{25\sqrt{2}} \quad h = 12{,}5\sqrt{2}$.

Questão 19

Comentário:

A) De acordo com a figura, os triângulos AOS e BOS são congruentes. Consideremos $B\hat{O}S = \alpha$. Temos:

$$\cos \alpha = \frac{6\,400}{2.6\,400} = \frac{1}{2} \quad \alpha = 60°$$

Assim, $A\hat{O}B = 120°$ e o comprimento do arco AB corresponde a $C = \frac{2\pi.6\,400}{3} = \frac{12\,800\pi}{3}$ km.

B) Lei dos Cossenos no Δ OCS:

$$d^2 = 6\,400^2 + (2.6\,400)^2 - 2.6\,400.(2.6\,400).\cos\theta$$

$$d^2 = 5.6\,400^2 - 4.6\,400^2.\frac{3}{4} \quad d^2 = 2.6\,400^2 \quad d = 6\,400\sqrt{2} \text{ km}$$

Questão 20

Comentário:

A) Pela Lei dos Senos, temos, no triângulo ABC:

$$\frac{15}{\text{sen}\frac{2\pi}{3}} = \frac{AB}{\text{sen}\frac{\pi}{6}} \quad \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \quad AB = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

B) Lei dos Cossenos no triângulo BCD:

$$BD^2 = 15^2 + 10^2 - 2.15.10.\cos\frac{\pi}{3}$$

$$BD^2 = 225 + 100 - 300.\frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 175 \quad BD = 5\sqrt{7} \text{ m}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O comprimento da escada é o produto do número de degraus pelo espaçamento entre eles.

Comprimento da escada: 8.25 = 200 cm

Sendo **x** o comprimento da rampa, pela Lei dos Senos temos:

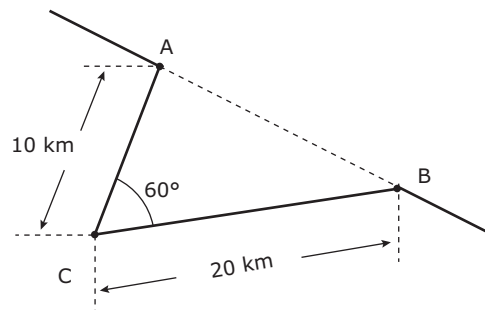
$$\frac{200}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = 100\sqrt{6} \text{ cm, ou seja, } x = \sqrt{6} \text{ m}$$

Questão 02 – Letra E

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:

Pela Lei dos Cossenos, temos:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2.AC.CB.\cos 60° \Rightarrow$

$AB^2 = 10^2 + 20^2 - 2.10.20.\frac{1}{2} \Rightarrow AB^2 = 300 \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$

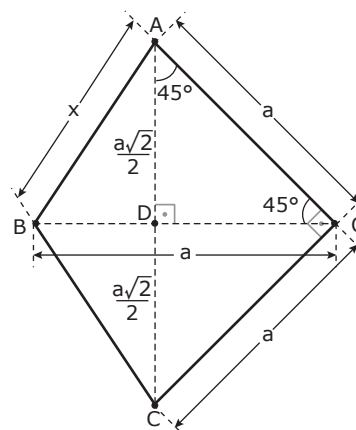
Portanto, a diferença de percurso encontrada pela construtora foi $(AC + CB) - AB = 10 \text{ km} + 20 \text{ km} - 10\sqrt{3} \text{ km} = (30 - 10\sqrt{3}) \text{ km} \Rightarrow (AC + CB) - AB = 10(3 - \sqrt{3})$ km.

Questão 03 – Letra A

Eixo Cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOC, temos:

$AC^2 = AO^2 + CO^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Como o triângulo AOC e o triângulo ABC são isósceles, $AD = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

No triângulo AOD, temos:

$$AO^2 = AD^2 + DO^2 \Rightarrow DO^2 = AO^2 - AD^2 \Rightarrow DO^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$BD = BO - DO = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $AB^2 = BD^2 + AD^2 \Rightarrow x^2 = \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

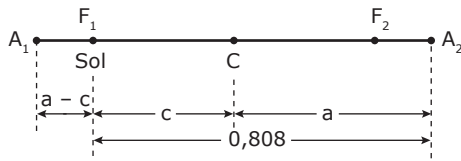
$$x^2 = a^2 - 2.a.\frac{a\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 = a^2 - a^2\sqrt{2} + a^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)} \Rightarrow x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

MÓDULO – E 13

Cônicas

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário:

Como a excentricidade da órbita é 0,01, temos:

$e = 0{,}01 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0{,}01 \Rightarrow c = 0{,}01a$ (I)

Temos ainda que $c + a = 0{,}808$ (II).

Substituindo (I) em (II):

$0{,}01a + a = 0{,}808 \Rightarrow a = 0{,}8$ e $c = 0{,}008$

Logo:

$d(A_1, \text{Sol}) = a - c = 0{,}792$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Como a equação tem valor 1, a máxima quantidade do produto **A** é dada quando **x** assumir valor máximo. Para isso, a produção do produto **B** deve ser nula (y = 0).

Então: $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{100} = 1 \underset{y=0}{\;} \quad x^2 = 400 \quad x = 20$ toneladas

Questão 03 – Letra C

Comentário: Manipulando a equação dada, temos:

$$x^2 - y^2 = 4 \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

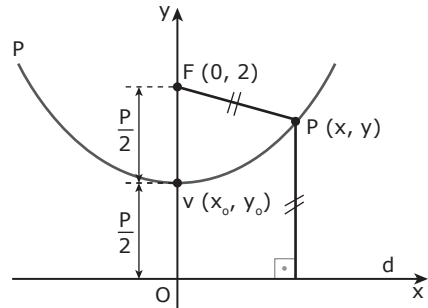
Assim, C(0, 0), a = b = 2.

Os focos dessa hipérbole são dados por $F_1(x_0 + c, y_0)$ e $F_2(x_0 - c, y_0)$, sendo (x_0, y_0) seu centro. O valor de **c** é obtido por meio do Teorema de Pitágoras (catetos **a** e **b**):

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c^2 = 4 + 4 \qquad c = 2\sqrt{2}$$

Portanto, $F_1\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ e $F_2\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Dado que a parábola tem F(0, 2) e o eixo Ox equidistantes, temos que seu vértice situa-se sobre o eixo **y**. Como o eixo **x** é também diretriz da parábola, temos a seguinte figura:

Assim, para p = 2 e V(0, 1):

$$\left(x - x_0\right)^2 = 2p\left(y - y_0\right)$$

$$\left(x - 0\right)^2 = 2.2\left(y - 1\right)$$

$$x^2 = 4y - 4 \qquad y = \frac{x^2}{4} + 1$$

Questão 05 – Letra E

Comentário:

P (x, y) é equidistante de y = 0 e de $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

P (x, y) é equidistante de y = 0 e de C (0, 2), (centro).

O ponto é equidistante de uma reta e de um ponto.

Por definição, o lugar geométrico de tais pontos é uma parábola.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: $F_1(-2, 0)$ $\quad C(0, 0)$

$F_2(2, 0)$ $\quad c = 2$

Como o eixo maior corresponde a 6, temos: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Pela Relação Fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b^2 = 5$

Logo, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Questão 03 – Letra C

Comentário:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 5 \qquad P(x, y),\ F_1(1, 2),\ F_2(2, 4)$$

$$d(p, F_1) + d(p, F_2) = 5$$

$$2a = 5$$

$$2c = d(F_1, F_2) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

$(2a > 2c \quad$ Elipse)

Questão 10 – Letra C

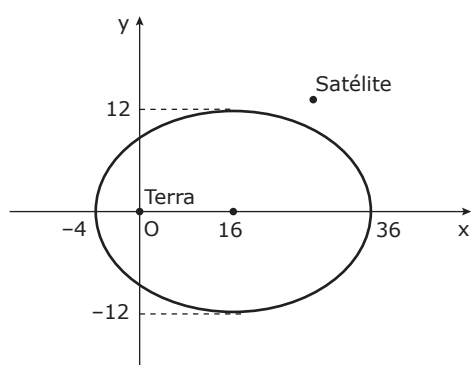
Comentário:

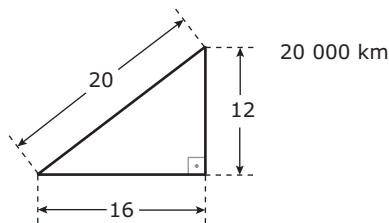
$9x^2 + 25y^2 - 288x - 1\,296 = 0$

Completando o quadrado:

$9x^2 - 288x + 2\,304 + 25y^2 = 1\,296 + 2\,304 \Rightarrow$

$9.(x - 16)^2 + 25y^2 = 3\,600 \div (3\,600) \Rightarrow$

$$\frac{(x-16)^2}{400}+\frac{y^2}{144}=1 \qquad \begin{array}{l} C=(16,0) \\ a=20 \\ b=12 \end{array}$$

A) Falso. 4 000 km.

B) Falso.

C) Verdadeiro. 36 000 km.

D) Falso. (36, 0).

E) Falso. Pela Relação Fundamental:

$20^2 = 12^2 + c^2 \Rightarrow c = 16$

Assim, a excentricidade da órbita do satélite é dada por:

$$e = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Manipulando a equação

$$4x^2+3y^2=36 \underset{:36}{\;} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$$

temos que a² = 12, b² = 9 e o centro da elipse é (0, 0). Assim, as coordenadas dos focos são $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$. O valor de **c** é obtido por meio do Teorema de Pitágoras, com catetos **b** e **c** e hipotenusa **a**:

$$a^2=b^2+c^2 \qquad c^2=12-9 \qquad c=\sqrt{3}$$

Logo:

$$F_1\left(0,\ \sqrt{3}\right) \text{ e } F_2\left(0,\ -\sqrt{3}\right)$$

Questão 12 – Letra A

Comentário:

I. $16x^2 + 4y^2 + 128x - 24y + 228 = 0 \Rightarrow$

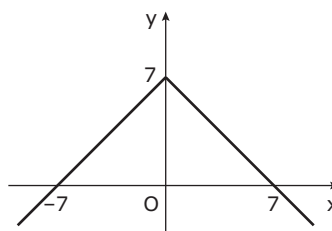
$16x^2 + 128x + 16.16 + 4y^2 - 24y + 4.9 =$

$-228 + 16.16 + 4.9 \Rightarrow$

$16(x^2 + 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) = 16.4 \div (16.4) \Rightarrow$

$$\frac{16(x+4)^2}{16.4}+\frac{4(y-3)^2}{16.4}=\frac{16.4}{16.4} \Rightarrow$$

$$\frac{16(x+4)^2}{16.4}+\frac{4(y-3)^2}{16.4}=\frac{16.4}{16.4}$$

II. $y = 7 - |x| = \begin{cases} 7-x, \text{ se } x \geq 0 \\ 7+x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

III. $y^2 - 6y - x + 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = x - 5 \Rightarrow$

$y^2 - 6y + 9 = x - 5 + 9 \Rightarrow (y - 3)^2 = x + 4$

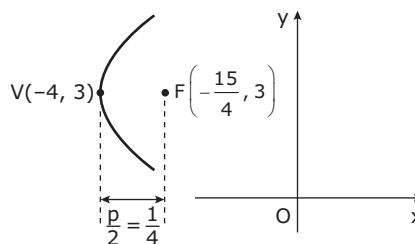
$$(y-3)^2 = 2.\frac{1}{2}.(x+4) \qquad \text{Parábola} \quad \begin{array}{l} V(-4, 3) \\ p=\frac{1}{2} \end{array}$$

01. Falso. O gráfico de (II) é representado por duas semirretas.

02. Verdadeiro. C(–4, 3) ∈ gráfico (y = 7 – |x|), pois:

$x = -4 \Rightarrow y - |-4| = 7 - 4 = 3$

04. Falso. $d(F, V) = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad F\left(-\frac{15}{4}, 3\right)$

$$S_F = \frac{-15}{4} + 3 = \frac{-3}{4} > -1$$

08. Verdadeiro. Pela Relação Fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

A excentricidade é dada por:

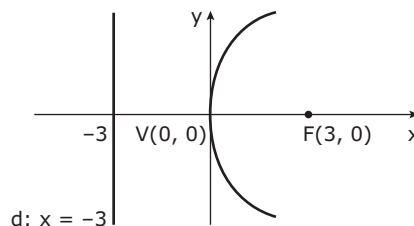
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Portanto, a soma dos itens verdadeiros corresponde a $S_v = 02 + 08 = 10 \in [8, 11]$.

Questão 13 – Letra B

Comentário:

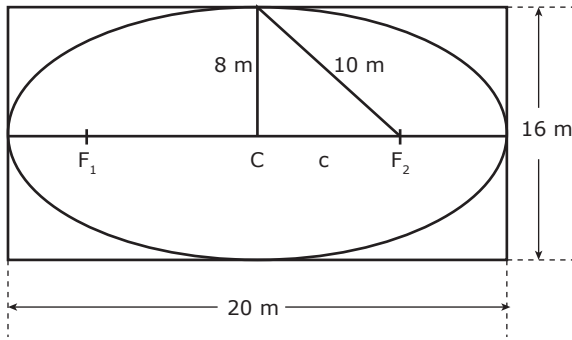
$V = (0, 0)$
$p = 6$

y
–3 V(0, 0) F(3, 0) x
d: x = –3

$(y - y_0)^2 = 2p.(x - x_0) \Rightarrow (y - 0)^2 = 2.6.(x - 0) \Rightarrow$

$y^2 = 12x \Rightarrow y^2 - 12x = 0$

MATEMÁTICA

Questão 14 – Letra E

Comentário: Observe a figura com seus dados:

Como $2a = 20 \Rightarrow a = 10$, temos que **a** é hipotenusa do triângulo indicado. Pelo Teorema de Pitágoras, $c = 6$ m. A distância entre os aspersores (distância focal) corresponde a 2c, ou seja, 12 m.

Questão 16 – Letra A

Comentário: Para que o seno seja igual a 0, temos que o ângulo deve ser da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+1}\right) = 0 \quad \frac{y}{x^2+1} = k\pi \quad y = k\pi x^2 + k\pi$$

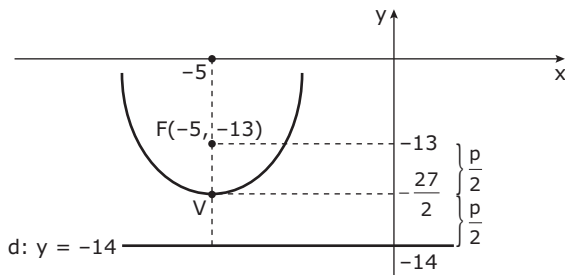
Se $y \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$. Portanto, o conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano é uma família de parábolas.

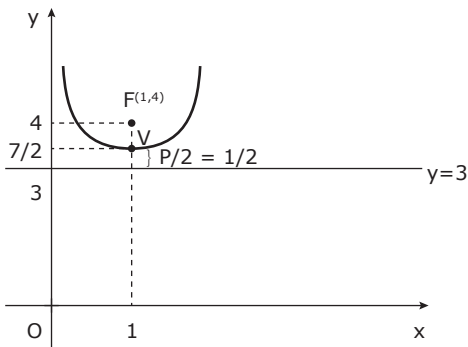
Questão 17 – Letra B

Comentário:

$2y - x^2 - 10x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x = 2y + 2 \Rightarrow$

$x^2 + 10x + 25 = 2y + 2 + 25 \Rightarrow (x + 5)^2 = 2y + 27 \Rightarrow$

$$(x + 5)^2 = 2.\left(y + \frac{27}{2}\right) \Rightarrow V\left(-5, -\frac{27}{2}\right), \quad p = 1$$

Questão 18 – Letra C

Comentário:

$$V\left(1, \frac{7}{2}\right); \; p = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2.1.\left(y - \frac{7}{2}\right)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2y - 7 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - x + 4$$

MÓDULO – E 14

Números complexos: forma algébrica

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

Comentário:

Temos que $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$. Daí:

$$z = \frac{1+i}{1-i}.\frac{(1+i)}{(1+i)} \quad z = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} \quad z = \frac{2i}{2} \quad z = i$$

Para determinar $z^{725} = i^{725}$, devemos fazer:

$$\begin{array}{r|l} 725 & 4 \\ \hline \textcircled{1} & 181 \end{array}$$

Logo, $z^{725} = i^{725} = i^1 = i$.

Questão 02 – Letra D

Comentário:

$$S = i^0 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{2\,013}$$

$$S = \left(i^0 + i + i^2 + i^3\right) + \ldots + \left(i^{2\,008} + i^{2\,009} + i^{2\,010} + i^{2\,011}\right) + \left(i^{2\,012} + i^{2\,013}\right)$$

$$S = \left(1 + i - 1 - i\right) + \ldots + \left(1 + i - 1 - i\right) + \left(1 + i\right) \quad S = 1 + i$$

Questão 03 – Letra B

Comentário:

$$z = (2 + xi)(y - 2i) \quad z = 2y - 4i + xyi + 2x$$

$$z = (2y + 2x) + i(xy - 4)$$

Sabemos que **z** tem parte real igual a 8 e parte imaginária igual a –i. Então:

$$2y + 2x = 8 \quad y = 4 - x$$
$$xy - 4 = -1$$

Manipulando as equações, temos:

$$x(4 - x) = 3 \quad -x^2 + 4x = 3 \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Para x = 3, y = 1; para x = 1, y = 3.

Logo, o módulo da diferença entre os valores de **x** e **y** é 2.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$$(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20} = \left[(1 + i)^2\right]^{10} - \left[(1 - i)^2\right]^{10} =$$

$$(1 + 2i - 1)^{10} - (1 - 2i - 1)^{10} = (2i)^{10} - (-2i)^{10} = 0$$

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$$\frac{2+i}{1+i} = a + bi \Rightarrow \frac{2+i}{1+i}.\frac{(1-i)}{(1-i)} = a + bi \Rightarrow$$

$$\frac{3-i}{2} = a + bi \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = a + bi \Rightarrow$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ e } b = -\frac{1}{2}$$

Assim, $a + b = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Exercícios Propostos

Questão 03 – Letra B

Comentário: $(2 + mi)(3 + i) = (6 - m) + (2 + 3m)i$

Para que esse número seja imaginário puro:

$6 - m = 0 \Rightarrow m = 6$

Questão 07 – Letra E

Comentário: Seja $z = \dfrac{2+i}{x+2i} \Rightarrow z(x + 2i) = 2 + i$.

Quando encontramos uma igualdade de números complexos, devemos separá-la em duas: igualdade das partes reais e igualdade das partes imaginárias.

Igualando as partes imaginárias:

$2z = 1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}$

Igualando as partes reais:

$zx = 2 \Rightarrow x = 4$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Seja $z = a + bi$ e o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$.

Para que **z** seja igual ao seu conjugado, $b = 0$, ou seja, **z** é um número real.

Os únicos números reais **z** que satisfazem $z^2 = 1$ são 1 e −1.

Portanto, temos dois possíveis valores de **z**.

Questão 09 – Letra E

Comentário: Sendo $z = a + bi$, temos:

$iz + 2z + i - 1 = 0 \Rightarrow i(a + bi) + 2(a + bi) + i - 1 = 0 \Rightarrow$

$ai - b + 2a + 2bi + i - 1 = 0 \Rightarrow$

$(2a - b - 1) + (a + 2b + 1)i = 0 \Rightarrow$

$$\begin{matrix} 2a - b - 1 = 0 & \quad 2a - b = 1 \\ a + 2b + 1 = 0 & \quad a + 2b = -1 \end{matrix}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = \dfrac{1}{5}$ e $b = -\dfrac{3}{5}$.

Portanto, $z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Sendo $z = 2 - i$, então $z^2 = (2 - i)^2 = 3 - 4i$.

Daí, o inverso de z^2 é:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1}{(3-4i)}\cdot\frac{(3+4i)}{(3+4i)} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Questão 13 – Letra D

Comentário: Foi dado que $z_1 = 4 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 1 + 3i$. Logo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+\sqrt{3}i}{1+3i} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{4+\sqrt{3}i}{1+3i}\cdot\frac{(1-3i)}{(1-3i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}-12}{10}i$$

Questão 14 – Letra C

Comentário:

$$x = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)} \qquad x = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} \qquad x = \frac{1+2i-1}{2} \qquad x = i$$

Como $y = 2x$, temos que $y = 2i$. Então:

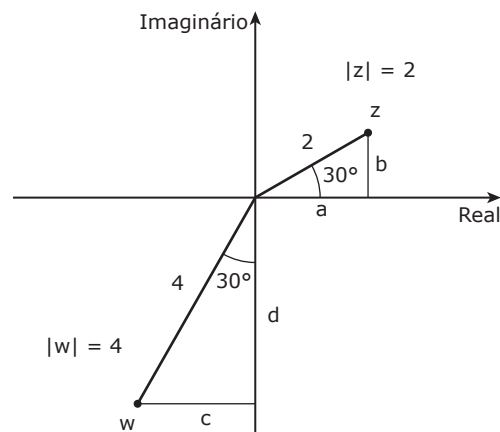
$(x + y)^2 = (3i)^2 = -9$

MÓDULO – E 15

Números complexos: forma trigonométrica

Exercícios de Fixação

Questão 01

Comentário: Observe a figura com seus dados.

Considerando o triângulo retângulo formado no primeiro quadrante, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{b}{2} \qquad b = 1$$

$$\cos 30° = \frac{a}{2} \qquad a = \sqrt{3}$$

Já para o triângulo retângulo do terceiro quadrante, considerando que estamos calculando o comprimento, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{|c|}{4} \qquad |c| = 2$$

$$\cos 30° = \frac{|d|}{4} \qquad |d| = 2\sqrt{3}$$

Temos que $z = \sqrt{3} + i$ e $w = -2 - 2\sqrt{3}.i$ (**c** e **d** são negativos, pois formam um par ordenado pertencente ao 3º quadrante). Logo, o tiro certeiro **t** é dado por:

$$t = \frac{w}{z} \qquad t = \frac{-2\left(1+\sqrt{3}.i\right)}{\sqrt{3}+i}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)} \qquad t = \frac{-2\left(\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}\right)}{3+1}$$

$$t = \frac{-\left(2\sqrt{3}+2i\right)}{2} \qquad t = -\sqrt{3} - i$$

Questão 02 – Letra C

Comentário:

$$(\cos 60° - i.\text{sen } 60°)^{601} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{601}$$

Fazendo 601 | 4 (resto 1, quociente 150), temos:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{601} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

Questão 03 – Letra B

Comentário:

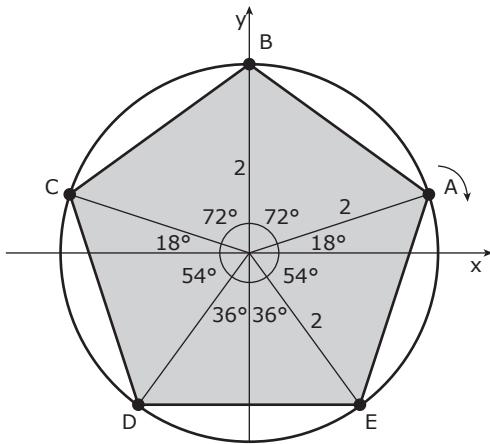
Sendo $z = x + yi$, então $|z - 2i| = 5 \Rightarrow$

$|x + yi - 2i| = 5 \Rightarrow |x + (y - 2)i| = 5 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 5 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 25$

Portanto, os números complexos que satisfazem $|z - 2i| = 5$ correspondem aos pontos da circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ de centro C(0, 2) e raio r = 5.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Dado o pentágono regular, a cada rotação de $\frac{360°}{5} = 72°$ em torno de seu centro, um vértice sobrepõe ao outro. Assim, considere uma circunferência circunscrita ao pentágono. Seja B(0, 2) a imagem do número complexo 2i. Como cada número complexo tem módulo 2, considere a seguinte figura:

Girando o pentágono no sentido horário até que **A** chegue ao ponto (–1, 0), temos em **A** uma rotação de 198°. Para atingir 228°, ainda faltam 30°. Então, utilizando a forma trigonométrica, temos:

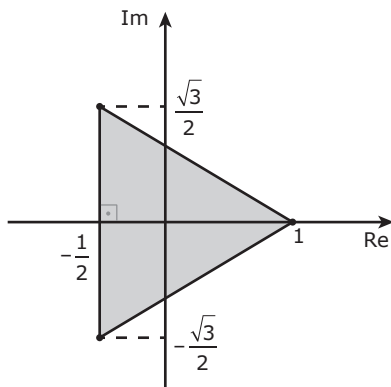
$$z = \rho\,(\cos \quad + i.\text{sen} \quad)$$

$$z = 2 \quad \underbrace{-\cos 30° + i.\text{sen}\, 30°}_{2^{\text{o}}\ \text{quadrante}}$$

$$z = 2 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2} \qquad z = -\sqrt{3} + i$$

A imagem do número complexo de A é $(-\sqrt{3}, 1)$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Representando os afixos no plano de Argand-Gauss, temos:

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$2.\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.\ 1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Vamos escrever o número complexo $(1 - \sqrt{3}i)$ na forma trigonométrica. Assim:

$$\rho_1 = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \Rightarrow \rho_1 = 2. \text{ Daí:}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $z_1 = 2 \ \cos\frac{5\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{3}$.

Agora, vamos escrever o número complexo (–1 + i) na forma trigonométrica. Assim,

$\rho_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{2}$. Daí:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $z_2 = \sqrt{2}.\ \cos\frac{3\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{3\pi}{4}$.

Fazendo $\frac{z_1}{z_2}$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}.\ \cos\ \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\ + i.\text{sen}\ \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}.\ \cos\frac{11\pi}{12} + i.\text{sen}\frac{11\pi}{12}$$

Portanto, ao dividirmos $(1 - \sqrt{3}i)$ por (–1 + i), obtemos um número complexo de argumento $\frac{11\pi}{12}$.

Questão 03 – Letra D

Comentário:

Note que $\text{Re}(z) = \sqrt{3} = 2.\cos\frac{\pi}{6}$ e $\text{Im}(z) = 1 = 2.\text{sen}\frac{\pi}{6}$, e, por isso, $z = 2.\ \cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}$, ou seja, o argumento de **z** é $\frac{\pi}{6}$.

Pela Primeira Fórmula de Moivre, temos que:

$\arg(z^4) = 4.\arg(z) = 4.\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Por isso, o ângulo formado entre as representações de z^4 e de **z** é $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Seja z = a + bi.

$$|z - 3i| = |a + (b - 3)i| = \sqrt{a^2 + (b-3)^2}$$

$$|z - 2| = |(a - 2) + bi| = \sqrt{(a-2)^2 + b^2}$$

Igualando as duas expressões e elevando ao quadrado:
$a^2 + (b - 3)^2 = (a - 2)^2 + b^2$
Desenvolvendo essa expressão, chegamos a:

$$b = \frac{4}{6}a + \frac{5}{6}$$

Cuja inclinação é positiva, já que **b** corresponde ao eixo das ordenadas, e **a** corresponde ao eixo das abscissas.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Se o argumento do número é $\frac{\pi}{4}$, então o número na forma trigonométrica é

$$\rho.\ \cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4} = \rho.\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho.\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\rho.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se o número está sobre a parábola $y = x^2$, sua parte imaginária é o quadrado de sua parte real, ou seja:

$$\frac{\rho\sqrt{2}}{2} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}^{2} \quad 1 = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \quad \rho = \sqrt{2}$$

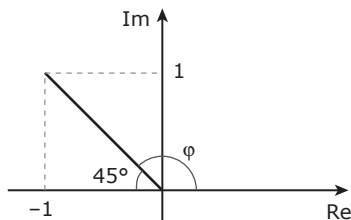
Por isso, o número vale $\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + i$.

Questão 09 – Letra D

Comentário:

$z = 1 + i$

$z^2 = (1 + i)^2 \quad z^2 = 2i$

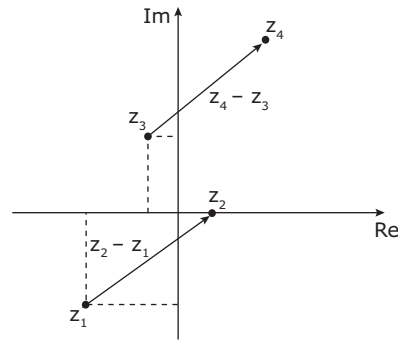
Então, $w = z^2 - z \Rightarrow w = 2i - (1 + i) \Rightarrow w = -1 + i$. Logo, seu argumento φ é dado por:

$$= 135° = \frac{3\pi}{4}$$

Um argumento de **w** é $\frac{3\pi}{4}$.

Questão 11 – Letra C

Comentário: A circunferência foi dividida em 8 partes iguais, começando do ponto (1, 0). Assim, como o raio da circunferência é 1 e os pontos estão uniformemente distribuídos, podemos concluir que esses pontos representam todas as raízes oitavas de 1. Portanto, temos que $x^8 = 1$.

Questão 16 – Letra B

Comentário: Há três possibilidades para a posição de z_4, uma para cada hipótese de vértice a ele oposto. Como podemos perceber no desenho a seguir, que ilustra a situação do problema, a única hipótese que permite que z_4 esteja no primeiro quadrante (partes real e imaginária positivas) é aquela que considera que z_1 é o vértice oposto a z_4.

Assim, temos:
$z_4 - z_3 = z_2 - z_1 \Rightarrow z_4 = z_2 + z_3 - z_1 \Rightarrow$
$z_4 = 1 - 1 + \frac{5}{2}i + 3 + 3i \Rightarrow z_4 = 3 + \frac{11}{2}i$

Questão 17 – Letra E

Comentário:

$$\cos\frac{\pi}{8} + i.\text{sen}\frac{\pi}{8}^{n} = \cos\frac{n\pi}{8} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{8}$$

Queremos que a parte imaginária do número complexo seja negativa, ou seja, $\text{sen}\frac{n\pi}{8} < 0$.

Então, $\pi < \frac{n\pi}{8} < 2\pi$, o que nos permite concluir que o menor inteiro positivo deverá ser 9.

Questão 18 – Letra A

Comentário: Seja $z = \sqrt{3} + i$.
Passando $z = \sqrt{3} + i$ para a forma trigonométrica, temos:

$$\rho = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2.\ \text{Daí:}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\ \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$$

2 = 2.(cos 30° + i.sen 30°)

Ao realizarmos potências de números complexos a um grau **n**, devemos elevar o módulo do número complexo a **n** e multiplicar o seu argumento pelo mesmo **n**.

Assim, $z^8 = 2^8.(\cos 8.30° + i.\text{sen } 8.30°) \Rightarrow$
$z^8 = 256.(\cos 240° + i.\text{sen } 240°)$.
Módulo de $z^8 = 256 = 4^4$.
Argumento de $z^8 = 240° = \frac{4\pi}{3}$.

Questão 19 – Letra B

Comentário: Para escrevermos z = x + 3i na forma trigonométrica, precisamos de seu módulo e de seu argumento. O módulo já é dado (|z| = 6); portanto, apenas nos falta o argumento de **z**.
Calculado o argumento de **z**, temos:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \theta = 30° \text{ ou } \theta = 150°$$

Como a parte real de **z** é negativa, **z** está no segundo ou no terceiro quadrante. Assim, seu argumento não pode ser 30°, o que nos leva a concluir que $\theta = 150° = \frac{5\pi}{6}$.

Portanto, $z = 6.\ \cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}$.

MÓDULO – E 16

Estatística

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

Comentário: Considerando o ponto médio de cada intervalo salarial e ponderando-se pelos respectivos pesos, temos que o salário médio dos empregados, em reais, é:

$$A = \frac{1\,500.20 + 2\,500.18 + 3\,500.9 + 4\,500.3}{20 + 18 + 9 + 3} \Rightarrow$$

$$A = \frac{30\,000 + 45\,000 + 31\,500 + 13\,500}{50} \Rightarrow A = 2\,400$$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Os setores **c** e **d** equivalem a 50% das respostas.

Como **a** equivale a 35% das respostas, então **b** equivale a 15% das respostas.

Sendo **R** o número de respostas, temos:

$15\%R = 270 \Rightarrow R = 1\,800$

Como os setores **c** e **d** têm 50% das respostas, então eles têm 900 respostas, ou seja, cada um tem 450 respostas.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Organizando as notas em ordem crescente, temos: 2, 3, 4, 5, 7, 7 e 8. Assim, a mediana é 5 e a moda é 7.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Analisando as afirmativas, temos:

I. Verdadeira. A moda do conjunto **P** é 25, enquanto que a moda do conjunto **L** é 27.

II. Falsa. A mediana do conjunto **L** é 26,5 anos.

III. Verdadeira. A idade média no conjunto **P** é

$$\frac{21 + 23 + 25 + 25 + 25 + 26 + 28 + 28 + 31 + 32 + 38}{12} \quad 27$$

e seu desvio médio é dado por:

$$\frac{6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 5 + 11}{12} = 3{,}5$$

Portanto, a alternativa E é a correta.

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$$\frac{19.13 + 20x + 21.3 + 22.10}{13 + x + 3 + 10} = 20{,}25$$

$$20x + 530 = 20{,}25\,(x + 26)$$

$$20x + 530 = 20{,}25x + 526{,}5$$

$$3{,}5 = 0{,}25x \qquad x = 14$$

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra E

Comentário: Considerando o ponto médio de cada intervalo salarial e ponderando-se pelos respectivos pesos, temos que o salário médio dos empregados, em reais, é:

$$A = \frac{250.14 + 750.4 + 1\,250.2 + 1\,750.2 + 2\,250.2}{14 + 4 + 2 + 2 + 2} \Rightarrow$$

$A \cong 708{,}00$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Considere os dados a seguir em ordem crescente.

1, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 34

A média aritmética desses dados é:

$$A = \frac{1 + 10.3 + 11.3 + 12.4 + 13.4 + 34}{16} \Rightarrow A \cong 12{,}4$$

A média aritmética sem o menor dado é:

$$A = \frac{10.3 + 11.3 + 12.4 + 13.4 + 34}{15} \Rightarrow A \cong 13{,}1$$

A média aritmética sem o maior dado é:

$$A = \frac{1 + 10.3 + 11.3 + 12.4 + 13.4}{15} \Rightarrow A \cong 10{,}9$$

A média aritmética sem os dados discrepantes é:

$$A = \frac{10.3 + 11.3 + 12.4 + 13.4}{14} \Rightarrow A \cong 11{,}6$$

As modas e a mediana não variam com os dados discrepantes. As modas, com ou sem esses dados, permanecem 12 e 13, que aparecem com mais frequência. A mediana, com todos os dados apresentados, é dada por $\frac{12 + 12}{2} = 12$.

Caso fosse retirado um dos valores discrepantes, a mediana estaria na 8ª posição (12). E, se retirados os dois valores, a mediana também seria 12 – a média das 7ª e 8ª posições. Portanto, apenas a média aritmética sofre influência dos dados discrepantes.

Questão 06 – Letra A

Comentário: A média aritmética dos 6 objetos dados é:

$$A = \frac{2.3 + 3.4 + 1.6}{6} \Rightarrow A = 4$$

Já o desvio padrão é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(3-4)^2 + 3(4-4)^2 + 1(6-4)^2}{6}} \Rightarrow \sigma = 1$$

Acrescentando **n** objetos de massa 4 kg, temos que o desvio padrão se reduz à metade do que era, ou seja:

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2(3-4)^2 + (3+n)(4-4)^2 + 1(6-4)^2}{6+n}} \qquad \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{6}{6+n}} \qquad n = 18$$

Portanto, foram acrescentados 18 objetos ao grupo.

Questão 08 – Letra A

Comentário: A média aritmética da distribuição de redução do custo mensal é dada por:

$$\frac{700.8 + 900.5 + 1\,400.1 + 2\,000.7 + 2\,400.5 + 3\,000.1}{8 + 5 + 1 + 7 + 5 + 1} =$$

$$\frac{40\,500}{27} = 1\,500$$

A mediana é 1 400. Então, a soma da média aritmética e da mediana corresponde a 2 900.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Em um conjunto de dados numéricos em que a variância é zero, podemos concluir que o desvio padrão também vale zero, pois:

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{0} \Rightarrow \sigma = 0$

Questão 12

Comentário:

A) De acordo com o enunciado, temos que a média salarial dos funcionários é:

$$A = \frac{10.500 + 5.1000 + 1.1500 + 10.2000 + 4.5000 + 1.10500}{10 + 5 + 1 + 10 + 4 + 1}$$

A = 2 000

Ordenando o conjunto de funcionários da empresa em ordem crescente de salário, temos que o 16º funcionário ocupa a posição central e o seu salário é R$ 1 500,00, ou seja, a mediana dos salários é R$ 1 500,00.

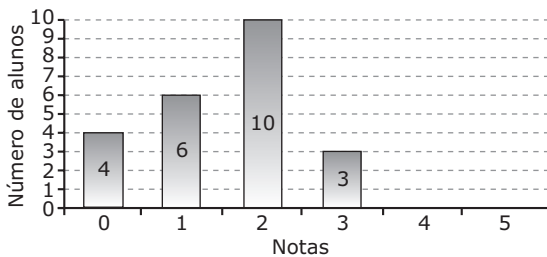
B) Considere a fórmula da variância $V = \frac{d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2}{n}$ e a média salarial igual a R$ 2 000,00. Contratando 2 novos funcionários com o salário de R$ 2 000,00, ou seja, desvio da média igual a zero, a nova variância será:

$$V' = \frac{d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2 + 0 + 0}{n + 2} = \frac{Vn}{n + 2}$$

Logo, a variância ficará menor, pois V' é menor que **V**.

Questão 13 – Letra D

Comentário: Como a mediana das notas é 2,5, colocando as notas em ordem crescente, temos que as duas notas centrais são 2 e 3.

Portanto, a 20ª nota é 2, e a 21ª nota é 3. Então, a frequência da nota 2 será 10.

Sejam **x** a frequência da nota 4 e 17 – x a frequência da nota 5. Como a média aritmética das notas é 2,6, temos que:

$$2,6 = \frac{4.0 + 6.1 + 10.2 + 3.3 + x.4 + (17 - x).5}{40} \Rightarrow x = 16$$

Logo, 16 alunos obtiveram nota 4, e 17 – 16 = 1 aluno obteve nota 5.

Portanto, a moda dessas notas é 4 pontos.

Questão 15 – Letra A

Comentário: Antes da correção, as modas das notas eram 5, 6 e 7 (de acordo com o gráfico).

Como a moda passou a ser apenas 7, a nota foi corrigida para 7 pontos, gerando 5 alunos com essa nota.

Além disso, a média das notas da turma aumentou em 0,2 ponto. Isso significa que cada um dos 20 alunos ganhou, em média, 0,2 ponto, gerando um aumento de 4 pontos (20.0,2) na soma das notas.

Como esse aumento foi de 4 pontos para um único aluno, este tinha nota 3 e foi para a nota 7.

Questão 16 – Letra D

Comentário: De acordo com a tabela de frequência dada, temos que Ma é:

$$Ma = \frac{13.3 + 14.2 + 15.4 + 16.1}{3 + 2 + 4 + 1} \Rightarrow Ma = 14,3$$

A idade que aparece com maior frequência é 15 anos. Logo, Mo = 15. Colocando as idades em ordem crescente, temos que as 5ª e 6ª idades ocupam a posição central, ou seja, a mediana das idades é:

$$Me = \frac{14 + 15}{2} \Rightarrow Me = 14,5$$

Questão 17 – Letra A

Comentário: Como $8 < x < 21$ e $x \neq 17$, ordenando os elementos do conjunto, temos:

{7, 8, x, 17, 21, 30} ou {7, 8, 17, x, 21, 30}. Assim, a mediana é dada por $\frac{x + 17}{2}$.

Sabemos que a média aritmética supera em uma unidade a mediana dos elementos desse conjunto.

Logo:

$$\frac{17 + 8 + 30 + 21 + 7 + x}{6} = \frac{x + 17}{2} + 1$$

$$\frac{83 + x}{6} = \frac{x + 19}{2} \qquad 83 + x = 3x + 57 \qquad x = 13$$

Então, a média aritmética é $\frac{83 + 13}{6} = 16$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Como uma saca possui 60 kg, então 90 kg correspondem a $\frac{90\text{ kg}}{60\text{ kg}}$ = 1,5 saca. A área de um talhão (30 000 m²) equivale a $\frac{30\,000\text{ m}^2}{10\,000\text{ m}^2}$ = 3 hectares. Logo, o desvio-padrão pode ser expresso por:

$$\text{Desvio-padrão} = \frac{90\text{ kg}}{\text{talhão}} = \frac{1,5\text{ saca}}{3\text{ hectares}} = 0,5\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}$$

Como a variância é o quadrado do desvio-padrão, temos:

$$\text{Variância} = \left(0,5\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}\right)^2 = 0,25\left(\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}\right)^2$$

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: Ordenando o conjunto de 7 cotações em ordem crescente, temos:

R$ 73,10; R$ 81,60; R$ 82,00; R$ 83,00; R$ 84,00; R$ 84,60; R$ 85,30

Portanto, a mediana das cotações mensais nesse período era igual a R$ 83,00.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: Ordenando o conjunto de notas obtidas pela equipe Gama em ordem crescente, excluindo o zero do aluno que faltou, temos 6; 6,5; 6,5; 7; 7; 8; 8; 10; 10.

Para a equipe Gama ter a classificação alterada, ou seja, a mediana alterada, o aluno faltante teria de comparecer na gincana e tirar uma nota **x**, em que:

$\frac{7 + x}{2} > 7,6$ (nota da equipe Delta)

Logo, para $x > 8,2$, a mediana seria alterada, ou seja, a classificação da equipe Gama se alteraria. Porém, como a 6ª nota é 8,0, a mediana não se altera, ou seja, independentemente da nota obtida pelo aluno faltante, a equipe Gama permanece em terceiro lugar.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Para determinar a mediana, precisamos ordenar os elementos do conjunto que estamos trabalhando. Logo, o conjunto é:

{4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 13}

Como o número de elementos é par, temos:

$$\frac{6+7}{2}=6,5$$

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Perceba que as médias dos classificados Marco e Paulo são iguais. Logo, se o critério de desempate é em favor do que obtiver pontuação mais regular, temos de observar quem obteve menor desvio padrão. O classificado Marco obteve menor desvio padrão, ou seja, é o que tirou notas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais mais regulares.

Questão 06 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A média **X** do número de gols por partida pode ser calculada por:

$$X=\frac{0.5+1.3+2.4+3.3+4.2+5.2+7.1}{5+3+4+3+2+2+1}$$

$$X=\frac{45}{20} \qquad x=2,25$$

Para determinar o valor da mediana **Y**, vamos ordenar os elementos:

{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7}

O número de elementos desse conjunto é par; logo, para a mediana, temos:

$$Y=\frac{2+2}{2}$$

$$Y=2$$

Para determinar o valor da moda **Z**, basta perceber na tabela que o número 0 apresenta maior frequência. Logo, Z = 0.

Finalmente, temos Z < Y < X.

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Se a equipe campeã é aquela em que o tempo mais se aproxima de 45 minutos, precisamos analisar, em primeiro lugar, as equipes que tiveram seus tempos mais próximos desses 45 minutos.

Já sabemos que a moda nos informa o valor mais frequente em um conjunto; por isso, concluímos que apenas as equipes III e IV obtiveram tempos suficientemente próximos do tempo médio. Para decidir qual dessas duas é a campeã, devemos analisar o desvio padrão de cada uma.

Já sabemos que quanto menor o desvio padrão, menor a variação dos resultados obtidos pela equipe em cada etapa. Como o desvio padrão da equipe III é menor que o da equipe IV, podemos concluir que os resultados obtidos pela equipe III estão mais próximos de 45 minutos que os obtidos pela equipe IV. Portanto, a equipe III é a campeã.

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A média aritmética dos números é:

$$A=\frac{1.4+2.1+4.2+5.2+6.1}{10}=3$$

Para determinar a mediana, vamos ordenar todos os números obtidos:

{1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 6}

Como o número de elementos é par, a mediana será dada por $\frac{2+4}{2}=3$.

Pela definição, moda é aquele elemento que aparece com maior frequência. Logo, pela tabela, a moda é 1, pois aparece quatro vezes.

Questão 09 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Sabemos que a moda é o valor que aparece com maior frequência num conjunto. Dos cinco números, já sabemos que três deles são iguais a 2. Logo, não importa o valor dos outros dois números desconhecidos, a moda será 2.

O mesmo acontece com a mediana. Note que, para qualquer valor colocado para as equipes **D** e **E**, o elemento central será sempre 2.

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Ordenando os dados coletados, temos:

{13,5; 13,5; 13,5; 13,5; 14; 15, 5; 16; 18; 18; 18,5; 19,5; 20; 20; 20; 21,5}

A média das temperaturas (T_M) é:

$$T_M=\frac{4.13,5+14+15,5+16+2.18+18,5+19,5+3.20+21,5}{15}$$

$$T_M=17\ °C$$

A mediana é o valor que ocupa a posição central do conjunto ordenado dos dados coletados (a 8ª posição), que é igual a 18 °C.

A moda é igual ao elemento que aparece com maior frequência, que nesse caso é 13,5 °C.